Algebra I

Sommersemester 2018

1. August 2018

Inhaltsverzeichnis

Dies ist eine Mitschrift der Vorlesung „Algebra I" von Dr. Hans Franzen an der Universität Bonn, gehalten im Sommersemester 2018.

Vorlesungswebsite:
http://www.math.uni-bonn.de/ag/stroppel/Franzen_Algebra_1.htmpl

Allgemeine Literatur

[AM04] Michael Atiyah und Ian Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview, 2004.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer New York, 1995.

[Mat80] Hideyuki Matsumura. *Commutative Algebra*. Benjamin-Cummings Pub Co, 1980.

[GW10] Ulrich Görtz und Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry 1*. Vieweg+Teubner Verlag, 2010.

Literatur zu Abschnitt 4

[Lan02] Serge Lang. *Algebra*. Springer New York, 2002.

[Hun80] Thomas W. Hungerford. *Algebra*. Springer New York, 1980.

[9. April 2018]

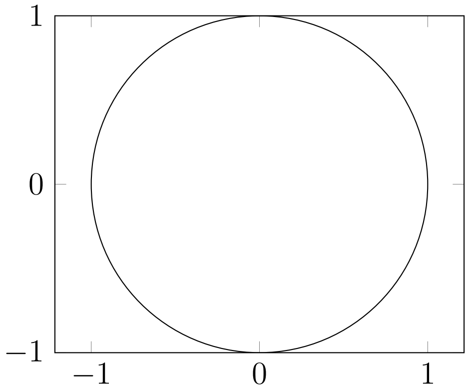
0 Motivation

Sei $k = \overline{k}$ (algebraisch abgeschlossener Körper). Seien $f_1, \dots f_m \in k[t_1, \dots t_n]$. Dann sind

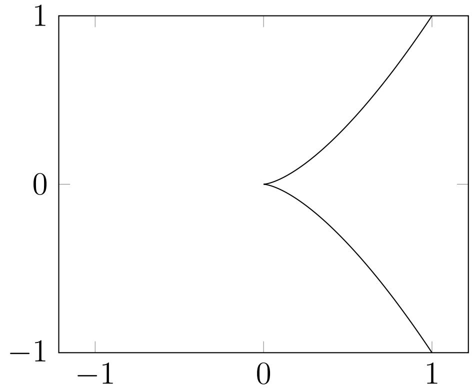
$$\mathrm{Z}(f_1, \dots, f_m) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n \mid f_i(x) = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq m\}$$

affine algebraische Varietäten.

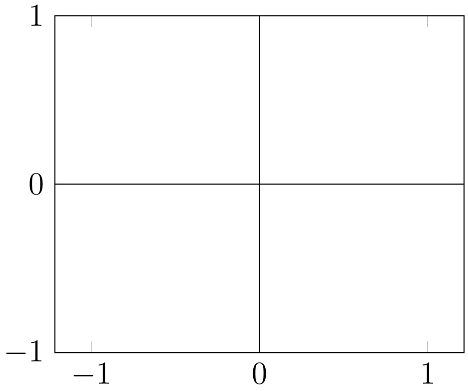
Beispiel. Sei $k = \mathbb{C}$, $n = 2$ und $m = 1$. Wir erhalten die folgenden Bilder:



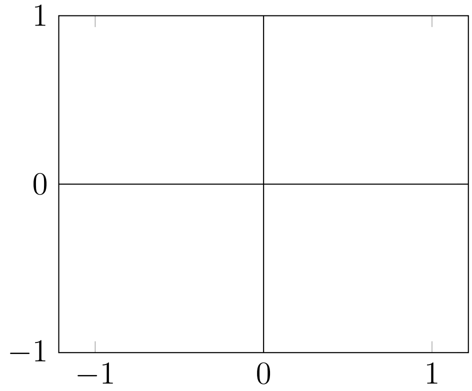
$f = x_1^2 + x_2^2 - 1$



$f = x_1^3 - x_2^2$



$f = x_1 \cdot x_2$



$f = x_1^{21} \cdot x_2^{138}$

In der algebraischen Geometrie betrachten wir die folgende Beziehung:

$$\begin{array}{rcl} \text{Affine Varietät } X & \longleftrightarrow & \text{Ring } \mathrm{A}(X) \\ \text{Studium der Geometrie von } X & \cong & \text{Studium des Ringes } \mathrm{A}(X) \end{array}$$

Hierzu ist das Studium von kommutativer Algebra notwendig.

1 Primideale und maximale Ideale

1.1 Grundbegriffe

Konvention. In der gesamten Vorlesung sind Ringe immer kommutativ und haben Eins. Ringhomomorphismen erhalten die Eins.

Definition 1.1. Sei A ein Ring und $I \subsetneq A$ ein Ideal.

i) I heißt Primideal, falls
   a) $ab \in A \setminus I$ für alle $a, b \in A \setminus I$ gilt, oder äquivalent
   b) ${}^{A}/_{I}$ ein Integritätsbereich ist.

ii) I heißt maximales Ideal, falls
   a) für jedes Ideal $J \subsetneq A$ aus $I \subseteq J$ bereits $I = J$ folgt, oder äquivalent
   b) ${}^{A}/_{I}$ ein Körper ist.

iii) $\operatorname{Spec} A := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \subsetneq A \text{ Primideal}\}$

iv) $\operatorname{Max} A := \{\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \subsetneq A \text{ maximales Ideal}\}$

Definition 1.2. Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

i) Sei $J \subseteq B$ ein Ideal. Dann ist $J \cap A := f^{-1}(J)$ ein Ideal von A, genannt *Kontraktion*. Ist J ein Primideal, so ist $J \cap A$ ebenfalls ein Primideal.

ii) Sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist $f(I)$ nicht notwendigerweise ein Ideal. Setze $I \cdot B := (f(I))$, das von $f(I)$ erzeugtes Ideal. Wir nennen dieses *Ausdehnung* von I.

Bemerkung. Es kann sein, dass $I \in \operatorname{Max} A$, aber $I \cdot B \notin \operatorname{Spec} B$. Sei dazu $A = \mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Z}[i]$. Sei $I = (2) \in \operatorname{Max}(\mathbb{Z})$, aber $I \cdot B = (2) \notin \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i]$, da $2 = (1-i)(1+i)$ ist.

Satz 1.3. *Sei A ein Ring und $I \subsetneq A$ ein Ideal. Dann existiert ein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ mit $I \subseteq \mathfrak{m}$.*

Beweis. Siehe Vorlesung Einführung in die Algebra, Satz 9.1, oder [AM04, Theorem 1.3]. □

Korollar 1.4. *Sei A ein Ring, bez. $A^\times = \{$Einheiten von $A\}$. Dann gilt*

$$A^\times = A \setminus \bigcup_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \mathfrak{m}.$$

Beweis. Ist $a \in A^\times$, so gilt $(a) = (1) = A$ und damit $a \notin \mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$.

Sei $a \notin \mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Dann ist $(a) \not\subseteq \mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$; es folgt also $(a) = A = (1)$ mit Satz 1.3 und damit $a \in A^\times$. □

1.2 Lokale Ringe

Definition 1.5. Sei A ein Ring. A heißt *lokal*, falls A genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ hat (d.h. $\operatorname{Max} A = \{\mathfrak{m}\}$).

Lemma 1.6. *Sei A ein Ring.*

i) *Sei $I \subsetneq A$ ein Ideal. Dann sind äquivalent:*
   a) $\operatorname{Max} A = \{I\}$
   b) $A \setminus I \subseteq A^\times$
   c) $A \setminus I = A^\times$

ii) *Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Falls $1 + x \in A^\times$ für alle $x \in \mathfrak{m}$ gilt, so ist $\operatorname{Max} A = \{\mathfrak{m}\}$.*

Beweis.

i) „a) $\Rightarrow$ b)“ folgt aus Korollar 1.4. Für „b) $\Rightarrow$ a)“ sei $J \subsetneq A$ ein Ideal. Dann liegt J in I, und es folgt $I \in \operatorname{Max} A$ mit $\operatorname{Max} = \{I\}$.

ii) Sei $b \in A \setminus \mathfrak{m}$. Es ist $b \in A^\times$ zu zeigen. Da $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$, gilt $(b) + \mathfrak{m} = A$, es existieren folglich $a \in A, x \in \mathfrak{m}$ mit $ab + x = 1$. Daraus folgt $ab = 1 - x \in A^\times$ und dann $b \in A^\times$. □

Beispiel 1.7.

0) Körper sind lokale Ringe.

i) Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring. Dann ist $A[\![t]\!]$ ein lokaler Ring. Dabei ist

$$A[\![t]\!] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \;\middle|\; a_i \in A \right\}$$

der Ring der formalen Potenzreihen mit kanonischer Addition und Multiplikation. Betrachte die Komposition $A[\![t]\!] \to A \to A/\mathfrak{m}$ gegeben durch $\varphi = \operatorname{can} \circ \operatorname{ev}_0$. Diese bildet surjektiv auf den Körper $A/\mathfrak{m}$ ab, also ist $\ker \varphi \in \operatorname{Max} A[\![t]\!]$.

Sei $f \in \ker \varphi$ und betrachte $1 + f$. Aus $f \in \ker \varphi$ folgt $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ mit $a_0 \in \mathfrak{m}$. Wir wollen ein $g \in A[\![t]\!]$ mit $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ mit $(1 + f)g = 1$ finden, d.h. $(1 + a_0)b_0$ und $(1 + a_0)b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots a_n b_0$ für alle $n > 0$. Erstere Gleichung ist lösbar, da $a_0 \in m$ liegt und damit $1 + a_0 \in A^\times$ folgt. Wir führen nun eine Induktion nach n. Nehme an, dass $b_0, \ldots b_{n-1}$ bereits bekannt sind. Dann folgt, dass $b_n = -(1 + a_0)^{-1}(a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$. Nach Lemma 1.6 ist $A[\![t]\!]$ lokal mit dem maximalen Ideal $(t) + \mathfrak{m}$. Der Residuenkörper ist $A[\![T]\!]/((t)+\mathfrak{m}) \cong A/\mathfrak{m}$.

Spezialfall: $k[\![t_1, \ldots t_n]\!] := k[\![t_1, \ldots, t_{n-1}]\!][\![t_n]\!]$ lokaler Ring mit maximalen Ideal $(t_1, \ldots, t_n)$ und Residuenkörper isomorph zu k.

ii) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $0 \in X$. Betrachte Paare (U, f) mit $U \subseteq X$ offen, $0 \in U$ und $f : U \to R$ stetig. Definiere Äquivalenzklassen durch $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$ genau dann, wenn ein offenes $W \subseteq U_1 \cap U_2$ mit $0 \in W$ und $f_1|_W = f_2|_W$ existiert. Die Äquivalenzklasse $\langle U, f\rangle$ heißt *Funktionenkeim*. Definiere $A := \{\langle U, f\rangle \mid (U, f) \text{ wie oben}\}$ mit punktweiser Addition und Multiplikation.

Wir zeigen nun, dass A ein lokaler Ring ist. Betrachte $\varphi : A \to \mathbb{R}$, $\langle U, f\rangle \to f(0)$, einen wohldefinierten Ringhomomorphismus. φ surjektiv und damit folgt $\ker \varphi \in \operatorname{Max} A$.

Sei $s = \langle U, f\rangle \in \ker \varphi$. Es bleibt $1 + s \in A^\times$ zu zeigen. Da $1 + f(0) = 1$, existiert eine offene Umgebung W von 0, sodass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in W$ ist. Dann ist $y : W \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+f(0)}$ stetig und es gilt $(1 + s)\langle W, y\rangle = 1$. Somit ist A ein lokaler Ring.

iii) Sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Dann ist $S := A \setminus \mathfrak{p}$ ein multiplikatives System. Wir definieren $A_\mathfrak{p} := S^{-1}A$ (Lokalisation).

Später werden wir zeigen, dass $A_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}$ ist.

[9. April 2018]

[12. April 2018]

1.3 Nilradikal und Jacobson-Radikal

Definition 1.8. Sei A ein Ring sowie $I \subseteq A$ ein Ideal. Definiere das *Radikal* von I durch

$$\sqrt{I} := \{x \in A \mid \exists n > 0 : x^n \in I\}.$$

$\operatorname{Nil} A := \sqrt{0}$ heißt *Nilradikal* von A.

Lemma 1.9.

i) $\sqrt{I}$ *ist ein Ideal von* A.

ii) $I \subseteq \sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{I}}$

iii) $\sqrt{I} = (1) \Leftrightarrow I = (1)$

iv) ${}^{A}/_{\sqrt{I}}$ *hat keine nilpotente Elemente (außer 0).*

Beweis.

i) Seien $x, y \in \sqrt{I}$, es existieren also $m, n > 0$ mit $x^m, y^n \in I$. Dann gilt

$$(x + y)^{m+n-1} = \sum_{r=0}^{m+n-1} \binom{m + n - 1}{r} \overbrace{x^r}^{\in I \text{ falls } r \geq m} \underbrace{y^{n+m-1-r}}_{\in I \text{ falls } r < m},$$

also liegt auch $x + y$ in I. Die anderen Eigenschaften sind schnell nachgeprüft.

ii) Da $I \subseteq \sqrt{I}$, folgt sofort $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$. Ist nun umgekehrt $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$, so existiert ein $n > 0$ mit $x^n \in \sqrt{I}$, und dann existiert ein $m > 0$ mit $(x^n)^m = x^{nm} \in I$. Also liegt x in $\sqrt{I}$.

iii) Die Rückrichtung ist klar. Sei also $\sqrt{I} = (1)$. Dann existiert ein $n > 0$ mit $1^n \in I$, also liegt 1 in I.

iv) Sei $z \in {}^{A}/_{\sqrt{I}}$ mit $z^n = 0$. Schreibe $z = x + \sqrt{I}$ für ein $x \in A$. Dann ist $x^n + \sqrt{I} = 0$, also liegt x^n in $\sqrt{I}$ und es folgt $z = 0$. $\square$

Beispiel 1.10. Sei $A = \mathbb{Z}$ und $I = (a)$. Was ist $\sqrt{(a)}$?

Für $a = 0$ ist $\sqrt{(a)} = (0)$. Sei nun $a \neq 0$, o.B.d.A. $a > 0$. Schreibe $a = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_l^{m_l}$ mit positiven Primzahlen $p_1, \dots, p_l$ und $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$. Dann ist $\sqrt{(a)} = (p_1 p_2 \dots p_l)$.

Beweis.

„$\subseteq$“ Ist $x \in \sqrt{(a)}$, so existiert ein $n > 0$ mit $x^n \in (a)$. a teilt also x^n, weshalb jedes p_i und somit auch ihr Produkt x teilt, woraus $x \in (p_1 \dots p_l)$ folgt.

„$\supseteq$“ Ist $x \in (p_1 \dots p_l)$, so wähle $n \geq \max\{m_1, \dots, m_l\}$. Dann liegt x^n in $(p_1^n \dots p_l^n) \subseteq (p_1^{m_1} \dots p_l^{m_l}) = (a)$. $\square$

Proposition 1.11. *Sei A ein Ring und I ein Ideal in A. Dann gilt*

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A, \\ \mathfrak{p} \supseteq I}} \mathfrak{p}.$$

Beweis.

„$\subseteq$“ Sei $x \in \sqrt{I}$. Dann existiert ein $n > 0$ mit $x^n \in I$. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p} \supseteq I$. Dann liegt x^n auch in $\mathfrak{p}$, und da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgt $x \in \mathfrak{p}$.

„$\supseteq$“ Sei $x \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A, \mathfrak{p} \supseteq I} \mathfrak{p}$. Angenommen, x wäre nicht in $\sqrt{I}$; für alle $n > 0$ gilt also $x^n \notin I$.

Definiere
$$\Sigma := \{J \mid J \subseteq A \text{ Ideal}, I \subseteq J, \forall n > 0 : x^n \notin J\}.$$

Dann ist $(\Sigma, \subseteq)$ angeordnet (partiell geordnet).

Wir wollen das Lemma von Zorn anwenden.

- $\Sigma \neq \emptyset$ (da $I \in \Sigma$)
- Sei $(J_t)_{t \in T}$ mit $T \neq \emptyset$ eine Kette in Σ, es gilt also $J_t \in \Sigma$ sowie $J_t \subseteq J_{t'}$ oder $J_t \supseteq J_{t'}$ für alle $t, t' \in T$. Dann ist $\bigcup_{t \in T} J_t$ ein Ideal in A und enthält I, aber kein x^n mit $n > 0$. Also liegt $\bigcup_{t \in T} J_t$ in Σ.

Nach dem Lemma von Zorn existiert nun ein $\mathfrak{p} \in \Sigma$, welches maximal in Σ bezüglich Inklusion ist. Wir behaupten, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A ist.

Beweis. Seien $a, b \in A \setminus \mathfrak{p}$. Es ist $ab \in A \setminus \mathfrak{p}$ zu zeigen.

Da $(a) + \mathfrak{p}$ und $(b) + \mathfrak{p}$ echt größer als $\mathfrak{p}$ sind, liegen sie nicht in Σ. Somit existieren $m, n > 0$ mit $x^m \in (a) + \mathfrak{p}$ und $x^n \in (b) + \mathfrak{p}$, weshalb wiederum Elemente $c, d \in A$ und $r, s \in \mathfrak{p}$ existieren, sodass $x^m = ac + r$ und $x^n = bd + s$ gilt. Wir erhalten

$$x^{m+n} = (ac + r)(bd + s) = \underbrace{abcd}_{\in (ab)} + \underbrace{rbd + sac + rs}_{\mathfrak{p}} \in (ab) + \mathfrak{p}.$$

Wäre $ab \in \mathfrak{p}$, so läge x^{m+n} auch in $\mathfrak{p}$, was aber $\mathfrak{p} \notin \Sigma$ bedeuten würde, ein Widerspruch. □

Nach unserer Annahme liegt $x = x^1$ in $\mathfrak{p}$, was aber wegen $\mathfrak{p} \in \Sigma$ einen Widerspruch darstellt. □

Definition 1.12. Sei A ein Ring. Dann heißt

$$\operatorname{Jac}(A) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} \mathfrak{m}$$

das *Jacobson-Radikal* von A.

Bemerkung 1.13.

i) $\operatorname{Jac}(A)$ ist ein Ideal von A.

ii) Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und ein Integritätsbereich. Dann gilt $\operatorname{Nil}(A) = (0)$ und $\operatorname{Jac}(A) = \mathfrak{m}$, d.h. $\operatorname{Nil}(A) \subsetneq \operatorname{Jac}(A)$ falls A kein Körper ist.

Beispielsweise ist $k[\![t]\!]$ ein lokaler Ring mit $\mathfrak{m} = (t) \neq (0)$ und ist nullteilerfrei, da mit $f = \sum_{i=m}^{\infty} a_i t^i, g = \sum_{i=n}^{\infty} b_i t^i \in k[\![t]\!]$ mit $a_m, b_n \neq 0$ dann

$$fg = \underbrace{a_m b_n t^{m+n}}_{\neq 0} + \text{ Terme höheren Grades} \neq 0$$

gilt.

Proposition 1.14. *Sei A ein Ring. Dann gilt* $\operatorname{Jac}(A) = \{x \in A \mid \forall a \in A : 1 - ax \in A^\times\}$.

Beweis.

„$\subseteq$" Sei $x \in \operatorname{Jac}(A)$ und $a \in A$. Angenommen, $1 - ax \notin A^\times$. Dann existiert ein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$ mit $1 - ax \in \mathfrak{m}$, sodass $1 = (1 - ax) + ax \in \mathfrak{m}$ gilt, Widerspruch.

„$\supseteq$" Sei $x \in A$ mit $1 - ax \in A^\times$ für alle $a \in A$ sowie $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$. Angenommen, $x \notin \mathfrak{m}$. Dann gilt $(x) + \mathfrak{m} = (1)$, es existieren also $a \in A, y \in \mathfrak{m}$ mit $1 = ax + y$. Dann folgt aber $\mathfrak{m} \ni y = 1 - ax \in A^\times$, ein Widerspruch. □

2 Moduln

2.1 Grundbegriffe

Definition 2.1. Sei A ein Ring. Ein A-*Modul* ist Tripel $(M, +, \cdot)$ besteht aus einer Menge M und Abbildungen $+ : M \times M \to M$, $\cdot : A \times M \to M$, sodass folgendes für alle $a, b \in A$ und $x, y \in M$ gilt:

i) $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

ii) $(a + b)x = ax + bx$

iii) $a(x + y) = ax + ay$

iv) $a(bx) = (ab)x$

v) $1 \cdot x = x$

Beispiel 2.2.

i) Falls $A = k$ Körper: A-Modul = k-Vektorraum

ii) A ist selbst ein A-Modul, genannt ${}_AA$.

iii) Ist $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so wird B ein A-Modul durch $a \cdot b = \varphi(a) \cdot b$.

iv) Ist $A = \mathbb{Z}$, so sind A-Moduln abelsche Gruppen (für $n \in \mathbb{Z}, n > 0 : nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ mal}}$).

v) Sei $A = k[t]$ (k Körper). Sei V ein k-Vektorraum und $\psi \in \mathrm{End}_k(V)$. Definiere $k[t] \times V \to V$ durch $(P, v) \mapsto (P(\psi))(v) := \sum_{\nu=0}^n a_\nu(\psi^\nu)(v)$ mit $P(t) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu t^\nu$. Dann wird V ein $k[t]$-Modul.

Definition 2.3. Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und N ein B-Modul. Dann wird N mit $+$ und $\cdot_A : A \times N \to N$ definiert durch $(a, y) \mapsto \varphi(a) \cdot y$ zu einem A-Modul. Bezeichnung: ${}_AN$.

Beispiel 2.4.

i) Mit Beispiel 2.2 ii) und iii) gilt ${}_AB = {}_A({}_BB)$.

ii) Sei $A = k$, $B = k[t]$ und N $k[t]$-Modul. Dann ist ${}_kN$ ein k-Vektorraum. Betrachte $\psi : {}_kN \to {}_kN, y \mapsto t \cdot y$. Dann gilt $\psi \in \mathrm{End}_k({}_kN)$. Sei $P(t) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu t^\nu \in k[t]$. Dann ist $P \cdot y = \sum_{\nu=0}^n a_\nu \psi^n(y) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu(t \cdot y) = P \cdot y$ und wir erhalten einen $N = k[t]$-Modul entstanden aus $({}_kN, \psi)$.

Definition 2.5. Seien M und N A-Moduln. Eine Abbildung $M \to N$ heißt A-*linear*, wenn $f(x + x') = f(x) + f(x')$ und $f(ax) = af(x)$ für alle $x, x' \in M$ und $a \in A$ gilt. Bezeichne $\mathrm{Hom}_A(M, N) := \{f \mid f\colon M \to N \text{ ist } A\text{-linear}\}$.

[12. April 2018]

[16. April 2018]

Bemerkung 2.6.

i) Seien $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ A-linear. Dann ist auch $g \circ f$ A-linear.

ii) Seien M und N A-Moduln. Dann wird $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ zu einem A-Modul mit

$$\begin{aligned} f + g &: \quad M \to N,\ x \mapsto f(x) + g(x) \\ af &: \quad M \to N,\ x \mapsto af(x)\ (= f(ax)) \end{aligned}$$

für alle $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ und $a \in A$.

Für die A-Linearität von af wird benötigt, dass A ein kommutativer Ring ist.

iii) Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus sowie $f\colon M \to N$ B-linear. Dann ist $f\colon {}_AM \to {}_AN$ A-linear. Wir erhalten also eine Injektion $\mathrm{Hom}_B(M, N) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_A({}_AM, {}_AN)$.

Definition 2.7. Sei $f\colon M \to N$ eine A-lineare Abbildung. f heißt *Isomorphismus* (von A-Moduln), wenn f bijektiv ist.

Bemerkung 2.8. Ist $f\colon M \to N$ ein Isomorphismus von A-Moduln, so ist f^{-1} ebenfalls A-linear. Das heißt, f ist genau dann ein Isomorphismus, wenn ein A-lineares $g\colon N \to M$ existiert, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gilt.

Beispiel 2.9. Sei M ein A-Modul. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} M &\to \mathrm{Hom}_A(A, M) \\ x &\mapsto [a \mapsto ax]\ . \end{aligned}$$

Das ist ein Isomorphismus von A-Moduln mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(A, M) &\to M \\ f &\mapsto f(1)\ . \end{aligned}$$

2.2 Untermoduln

Definition 2.10. Sei M ein A-Modul. Eine Teilmenge $M' \subseteq M$ heißt A-*Untermodul*, falls

i) $0 \in M'$

ii) $x + x' \in M'$

iii) $ax \in M'$

für alle $x, x' \in M'$ und $a \in A$ gelten.

Falls $M' \subseteq M$ ein A-Untermodul ist, ist M' mit den Einschränkungen der Addition und der skalaren Multiplikation von M wieder ein A-Modul; die Inklusion $M' \hookrightarrow M$ ist A-linear.

Sei $M' \subseteq M$ ein A-Untermodul. Dann ist ${}^{M}\!/_{M'}$ (als abelsche Gruppe) mit

$$\begin{array}{rcl} A \times {}^{M}\!/_{M'} & \longrightarrow & {}^{M}\!/_{M'} \\ (a, x + M') & \longmapsto & ax + M' \end{array}$$

ein A-Modul. Die Wohldefiniertheit ist schnell nachgerechnet.

Die Quotientenabbildung $\pi\colon M \to {}^{M}\!/_{M'}$ ist A-linear (nach der Definition der Skalarmultiplikation).

Beispiel 2.11.

i) Für $M = {}_AA$ sind die A-Untermoduln von ${}_AA$ genau die Ideale von A.

ii) Sei $A = k[t]$ und M ein A-Modul. Dann ist M eindeutig bestimmt durch $({}_kM, \psi)$, wobei $\psi \in \mathrm{End}_k(M)$ mit $\psi(x) = tx$. Sei $M' \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann ist M' genau dann ein $k[t]$-Untermodul, wenn M' ein k-Untervektorraum von ${}_kM$ ist und $\psi(M') \subseteq M'$ gilt.

Beweis.

„$\Rightarrow$": Klar.

„$\Leftarrow$": Die Axiome i) und ii) von Untermoduln sind erfüllt, da M' ein Untervektorraum ist. Für Axiom iii) sei $x \in M'$ und $P \in k[t]$ mit $P(t) = \sum a_\nu t^\nu$ mit $a_\nu \in k$. Dann folgt $P \cdot x = \sum a_\nu \psi^\nu(x) \in M'$, da $\psi^\nu(x)$ in M' liegt. $\square$

iii) Sei $I \subseteq A$ ein Ideal, M ein A-Modul. Definiere $I \cdot M := \{\sum a_i x_i \mid a_i \in I, x_i \in M\} \subseteq M$. Das ist ein A-Untermodul. Beipsielsweise $I = (a)$; dann ist $(a) \cdot M = \{ax \mid x \in M\}$.

Definition 2.12. Sei $f\colon M \to N$ eine A-lineare Abbildung. Definiere

- $\ker f := \{x \in M \mid f(x) = 0\}$,
- $\mathrm{im}\, f := f(M)$,
- $\mathrm{coker}\, f := {}^{N}\!/_{\mathrm{im}\, f}$.

Der Kern und das Bild von f sind dabei Untermoduln von M bzw. N.

Lemma 2.13. *Sei $f\colon M \to N$ eine A-lineare Abbildung.*

i) *Sei $M' \subseteq M$ ein A-Untermodul mit $M' \subseteq \ker f$. Dann existiert genau eine Abbildung $\overline{f}\colon {}^{M}/_{M'} \to N$, sodass folgendes Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & N \\ {}^{M}/_{M'} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

ii) *Es existiert genau eine A-lineare Abbildung $\tilde{f}\colon {}^{M}/_{\ker f} \to \operatorname{im} f$, sodass das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & N \\ {}^{M}/_{\ker f} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & \operatorname{im} f \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Beweis.

i) Definiere $\overline{f}\colon {}^{M}/_{M'} \to N$ durch $\overline{f}(x + M') = f(x)$ (wohldefiniert, da $M' \subseteq \ker f$). Außerdem ist $\overline{f}$ auch A-linear, da $\overline{f}(ax + M') = f(ax) = a(f(x)) = a\overline{f}(x + M')$ gilt.

ii) Wenden wir i) auf $M' = \ker f$ an, so erhalten wir eine eindeutige A-lineare Abbildung $\overline{f}\colon {}^{M}/_{\ker f} \to N$, sodass

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & N \\ {}^{M}/_{\ker f} \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Da $\operatorname{im} \overline{f} = \operatorname{im} f$, folgt

$$\begin{tikzcd} & N \\ {}^{M}/_{\ker f} \arrow[ur, "\overline{f}"] \arrow[r, dashed, "\exists! \tilde{f}"] & \operatorname{im} f \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\tilde{f}$ ist analog zum Homomorphiesatz für Gruppen bijektiv. $\square$

Bemerkung 2.14. Sei M ein A-Modul sowie $M_i \subseteq M$ Untermoduln mit $i \in I$.

i) $\bigcap\limits_{i \in I} M_i$ ist ein Untermodul.

ii) Sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Definiere

$$\langle T \rangle := \bigcap_{\substack{T \subseteq M' \subseteq M \\ M' \text{ Untermodul}}} M'$$

als den von T erzeugten Untermodul.

iii) Die Menge $\sum_{i\in I} M_i := \left\{\sum x_i \,\middle|\, {\scriptstyle x_i\in M_i \text{ mit } i\in I, \atop \text{nur endlich viele } x_i\neq 0}\right\}$ ist ein Untermodul.

Bemerkung 2.15. Seien M_i A-Moduln mit $i \in I$.

i) $\prod_{i\in I} M_i := \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in M_i\}$ ist ein A-Modul mit $a(x_i) = (ax_i)$.

ii) $\bigoplus_{i\in I} M_i := \{(x_i)_{i\in I} \mid \text{nur endlich viele } x_i \neq 0\} \subseteq \prod_{i\in I} M_i$ ist ein Untermodul.

iii) Sind $M_i \subseteq M$ Untermoduln und $M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j = \{0\}$, so ist $\sum_{i\in I} M_i \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$.

iv) Falls $M_i = M$ für alle $i \in I$, schreibe $M^I := \prod_{i\in I} M_i$ und $M^{(I)} := \bigoplus_{i\in I} M_i$.

2.3 Endlich erzeugte Moduln

Definition 2.16. Sei M ein A-Modul. Sei $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq M$. $\{x_i\}$ heißt

- linear unabhängig (linearly independent)
- Erzeugendensystem (generating system)
- Basis

analog zur linearen Algebra.

i) M heißt *frei*, falls eine der folgenden, äquivalenten Aussagen gilt:
   - M hat eine Basis.
   - Es existiert eine Menge I, sodass ein Isomorphismus $A^{(I)} \xrightarrow{\cong} M$ existiert.

ii) M heißt *endlich frei*, falls eine der folgenden, äquivalenten Aussagen gilt:
   - M hat eine endliche Basis.
   - Es existiert ein $n \geq 0$, sodass ein Isomorphismus $A^n \xrightarrow{\cong} M$ existiert.

iii) M heißt *endlich erzeugt*, falls eine der folgenden, äquivalenten Aussagen gilt:
   - M hat ein endliches Erzeugendensystem.
   - Es existiert ein $n \geq 0$, sodass eine surjektive A-lineare Abbildung $A^n \to M$ existiert.

iv) M heißt *endlich präsentiert*, falls ein $n \geq 0$ existiert, sodass eine surjektive A-lineare Abbildung $f\colon A^n \to M$ existiert, sodass $\ker f$ endlich erzeugt ist.

Bemerkung 2.17.

i) endlich frei $\Rightarrow$ endlich präsentiert $\Rightarrow$ endlich erzeugt

ii) Falls $A = k$ Körper: endlich erzeugt $\Rightarrow$ endlich frei

iii) Sei $A = \mathbb{Z}$, $M = {}^{\mathbb{Z}}/_{m\mathbb{Z}}$. Dann ist M endlich präsentiert, aber nicht endlich frei.

iv) Sei $A = \mathbb{Z}[T_1, T_2, T_3, \dots]$. Betrachte $\mathrm{ev}_{(T_i=0)} \colon \mathbb{Z}[T_1, T_2, \dots] \to \mathbb{Z}$ und $M = {}_A\mathbb{Z}$. Dann ist M endlich erzeugt, aber nicht endlich präsentiert, denn $\ker \mathrm{ev}_{(T_i=0)} = (T_1, T_2, \dots)$, was nicht endlich erzeugt ist.

Lemma 2.18 (Nakayamas Lemma). *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul und $I \subseteq A$ ein Ideal mit $I \cdot M = M$.*

i) *Es existiert ein $a \in I$ mit $(1+a)\cdot M = \{0\}$ (das heißt, für alle $x \in M : (1+a)x = 0$).*

ii) *Falls $I \subseteq \mathrm{Jac}(A)$, so gilt $M = \{0\}$.*

Beweis.

i) Induktion nach n, der minimalen Anzahl der Erzeuger von M.

$n = 0$: $M = 0$, klar.

$n-1 \to n$: Sei $x_1, \dots, x_n$ ein Erzeugendensystem von M. Definiere $N := {}^{M}/_{\langle x_n \rangle}$. Sei $\pi \colon M \to N$ die Quotientenabbildung. Dann folgt $N = \langle \pi(x_1), \dots, \pi(x_{n-1}) \rangle$. Nun gilt $I \cdot N = N$, da für $y \in N$ ein $x \in M = I \cdot M$ mit $\pi(x) = y$ existiert, und somit $a_i \in I$ sowie $\tilde{x}_i \in M$ mit $y = \sum a_i \pi(\tilde{x}_i) \in I \cdot N$ existieren.

Nach der Induktionsannahme existiert ein $b \in I$, sodass $(1+b) \cdot N = \{0\} \subseteq N = {}^{M}/_{\langle x_n \rangle}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&(1+b) \cdot M \subseteq \langle x_n \rangle \\
\Rightarrow\ &(1+b) \cdot M = (1+b) \cdot (I \cdot M) = I \cdot ((1+b) \cdot M) \subseteq I \cdot \langle x_n \rangle \\
\Rightarrow\ &\exists c \in I : (1+b)x_n = cx_n \\
\Rightarrow\ &(1+b-c)x_n = 0 \\
\Rightarrow\ &(1+b-c)(1+b)M = \{0\}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $(1+b-c)(1+b) = (1+a)$ mit $a = b - c + b^2 - bc \in I$.

ii) Sei $x \in M$. Nach Punkt i) existiert ein $a \in I$ mit $(1+a)x = 0$. Da $a \in \mathrm{Jac}(A)$, folgt nach Proposition 1.14 dann $1 + a \in A^\times$; also gilt $x = 0$. □

[16. April 2018]

[19. April 2018]

Nachtrag zu Bemerkung 2.17: Sei $A = \mathbb{Z}[T_1, \dots]$, $\varphi = \mathrm{ev}_{T_i=0} \colon A \to \mathbb{Z}$ und $M = {}_A\mathbb{Z}$, also $p \cdot z = p(0, \dots) \cdot z$ für $p \in A, z \in \mathbb{Z}$. Wir behaupten, dass M (als A-Modul) endlich erzeugt, aber nicht endlich präsentiert ist.

Beweis. M ist offensichtlich endlich erzeugt.

Angenommen, M ist endlich präsentiert. Dann existiert eine surjektive, A-lineare Abbildung $f \colon A^n \twoheadrightarrow M$, sodass $\ker f$ endlich erzeugt ist. Sei $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in A^n$, wobei die 1 im j-ten Eintrag steht. Definiere nun $z_j = f(e_j) \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\ker f = \left\{p = (p_1, \dots, p_n) \in A^n \;\middle|\; \sum_{j=0}^n p_j(0) z_j = 0\right\}$.

Nach obiger Annahme existieren nun $p^{(1)}, \dots, p^{(m)} \in \ker f$ mit $\ker f = \left\langle p^{(1)}, \dots, p^{(m)} \right\rangle_A$. Schreibe $p^{(i)} = \left(p_1^{(i)}, \dots, p_n^{(i)}\right)$. Wähle $N > 0$, sodass T_N in keinem der $p_j^{(i)}$ auftritt. Betrachte $T_n \cdot e_j \in \ker f$. Es existiert dann ein $Q^{(i,j)} \in A$ mit $T_N \cdot e_j = \sum_{i=1}^n Q^{(i,j)} p^{(i)}$.

Folglich gilt $\sum_{i=1}^n Q^{(i,j)} p_k^{(i)} = \delta_{jk} T_N$ für alle $1 \leq k \leq n$. Damit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^n z_k \cdot \sum_{i=1}^n Q^{(i,j)} p_k^{(i)} = z_j T_n = \sum_{i=1}^n Q^{(i,j)} \cdot \sum_{k=1}^n z_k p_k^{(i)}. \tag{*}$$

Wir betrachten nun den Ringhomomorphismus $\varphi_n : A \to \mathbb{Z}[T_N]$ mit $\varphi(T_i) = 0$ für $i \neq N$. Wendet man φ_n auf (*) an, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n \varphi_n\left(Q^{(i,j)}\right) \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n z_k \varphi_n \underbrace{\left(p_k^{(i)}\right)}_{p_k^i(0,\dots)}}_{\sum_{k=1}^n z_k p_k(0) = 0, \text{ da } p_k^{(i)} \in \ker f} = z_j \cdot \underbrace{\varphi_n(T_N)}_{T_n}.$$

Also gilt $z_j = 0$, und da j beliebig ist, auch $f = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zur Surjektivität von f. $\square$

Korollar 2.19. *Sei M ein A-Modul, $N, N' \subseteq M$ A-Untermoduln mit N' endlich erzeugt und $I \subseteq \operatorname{Jac}(A)$ ein Ideal in A. Falls $M = N + IN'$ gilt, so folgt bereits $M = N$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass M/N endlich erzeugt ist. Es gilt $M = N + I \cdot N' \subseteq N + N' \subseteq M$. Also ist die Komposition $N' \hookrightarrow M \to M/N$ surjektiv, weil für $x + N \in M/N$ wegen $M = N + IN'$ dann $y \in N$ und $y' \in N'$ mit $x = y + y'$ existieren, sodass also

$$x + N = y + y' + N = y' + N \in \operatorname{im}(N' \hookrightarrow M \to M/N)$$

gilt. Da N' endlich erzeugt ist und $N' \twoheadrightarrow M/N$ surjektiv ist, ist auch M/N endlich erzeugt.

Weiterhin gilt $M/N = I \cdot M/N$, denn für $x + N \in M/N$ existieren wegen $M = N + I \cdot N'$ dann $y' \in N$ sowie $a_i \in I$ und $y_i' \in N'$ mit $x = y' + \sum a_i y_i'$, sodass also $x + N = \sum a_i y_i' + N = \sum a_i (y_i' + N)$ gilt, was in $I \cdot M/N$ liegt. Die andere Inklusion ist trivial.

Mit Nakayamas Lemma folgt nun $M/N = \{0\}$, also $M = N$. $\square$

Bemerkung 2.20. Sei M ein A-Modul sowie $I \subseteq A$ ein Ideal.

i) Falls $I \cdot M = \{0\}$, so ist M ein A/I-Modul via $(a + I) \cdot x = ax$.

ii) Da $I \cdot M/IM = \{0\}$, ist M/IM ein A/I-Modul.

Korollar 2.21. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul sowie $x_1, \dots, x_n \in M$ und $\pi : M \to M/\mathfrak{m}M$. Falls $M/\mathfrak{m}M$ von $\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)$ als $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum erzeugt wird, erzeugen die x_i schon M als A-Modul.*

Beweis. Die $\pi(x_i)$ sind ein Erzeugendensystem von $M/\mathfrak{m}M$ als $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum, also auch als A-Modul. Deshalb gilt $\langle x_1, \dots, x_n \rangle_A + \mathfrak{m}M = M$. Mit Korollar 2.19 folgt nun $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_A$. $\square$

2.4 Tensorprodukte

Definition 2.22. Seien M, N, P A-Moduln Eine Abbbildung $h\colon M \times N \to P$ heißt *A-bilinear*, falls die Abbildungen

$$\begin{aligned} h(x,-)\colon\ N \to P, &\quad y' \mapsto h(x,y') \\ h(-,y)\colon\ M \to P, &\quad x' \mapsto h(x',y) \end{aligned}$$

A-linear für alle $x \in M$ und $y \in N$ sind.

Proposition 2.23 (Existenz des Tensorprodukts)**.** *Seien M, N A-Moduln.*

i) *Es existiert ein Paar (T, h), wobei T ein A-Modul und $h\colon M \times N \to T$ A-bilinear ist, sodass für alle (P, g) mit P A-Modul und $g\colon M \times N \to P$ A-bilinear eine eindeutige A-lineare Abbildung $\lambda\colon T \to P$ existiert, sodass das Diagramm* (a) *kommutiert.*

ii) *Falls (T', h') ein weiteres Paar mit der universellen Eigenschaft* i) *ist, so existiert ein eindeutiger Isomorphismus von A-Moduln $\lambda\colon T \to T'$, sodass das Diagramm* (b) *kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "\lambda"] \\ & P \end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & T \arrow[d, "\lambda"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

(b)

Beweis.

i) Sei $D := A^{(M \times N)}$ der freie Modul mit Basis $M \times N$. Die Elemente von D sind also Linearkombinationen der Form $\sum a_i[x_i y_i]$ mit $a_i \in A$ sowie $x_i \in M$ und $y_i \in N$.

Sei $U \subseteq D$ der A-Untermodul erzeugt von

$$\begin{aligned} &[ax + a'x', y] - a[x,y] - a'[x',y] \\ &[x, ay + a'y'] - a[x,y] - a'[x',y] \end{aligned}$$

für alle $a, a' \in A$, $x, x' \in M$ und $y, y' \in N$. Betrachte $T := {}^{D}\!/_{U}$ und

$$\begin{aligned} h\colon M \times N &\to D \to {}^{D}\!/_{U} \\ (x,y) &\mapsto [x,y]. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist h bilinear.

Nun zur universellen Eigenschaft. Sei hierzu (P, g) mit einem A-Modul P und einer A-linearen Abbildung $g : M \times N \to P$ gegeben. Betrachte

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}\colon D &\to P, \\ [x,y] &\mapsto g((x,y)), \end{aligned}$$

die eindeutig bestimmte A-bilineare Abbildung mit dieser Eigenschaft, wie wir nun zeigen.

Es gilt $\overline{\lambda}(U) = \{0\}$, da

$$\overline{\lambda}([ax + a'x', y] - a[x, y] - a'[x', y]) = g(ax + a'x', y) - ag(x, y) - a'(x', y) = 0$$

gilt (die andere Erzeugerdarstellung funktioniert analog).

Wir erhalten also das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\overline{\lambda}"] \arrow[d] & P \\ {}^{D}\!/_{U} \arrow[ur, dashed, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Es gilt hierbei $\lambda(h(x, y)) = \lambda([x, y]) = g(x, y)$, also $\lambda \circ h = g$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $h' : {}^{D}\!/_{U} \to P$ eine weitere A-lineare Abbildung mit $\lambda' \circ h = g$. Dann gilt $\lambda'([x, y] + U) = \lambda'(h(x, y)) = g(x, y) = \lambda([x, y] + U)$, also folgt $\lambda = \lambda'$, da ${}^{D}\!/_{U}$ von $\{[x, y] + U\}$ als A-Modul erzeugt wird.

ii) Sei (T', h') ein weiteres Paar mit der universellen Eigenschaft. Wir erhalten die zwei kommutativen Diagramme (a) und (b).

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists!\lambda"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

(a)

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h'"] \arrow[dr, "h'"'] & T' \arrow[d, dashed, "\exists!\lambda'"] \\ & T \end{tikzcd}$$

(b)

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h"'] & T \arrow[d, "\lambda' \circ \lambda"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

(c)

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h"'] & T \arrow[d, "\mathrm{id}_T"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

(d)

Vergleiche nun (c) und (d), woraus aber aufgrund der Eindeutigkeit aus i) bereits $\lambda' \circ \lambda = \mathrm{id}_T$ folgt. Analog folgt $\lambda \circ \lambda' = \mathrm{id}_{T'}$, also ist λ bijektiv. □

Definition 2.24. Das Paar (T, h) aus Proposition 2.23 heißt das *Tensorprodukt* von M und N über A. Wir schreiben $T = M \otimes_A N$ sowie $h(x, y) = x \otimes y$ für $x \in M$ und $y \in N$.

Bemerkung 2.25.

i) Die Notation „$x \otimes y$“ kann missverständlich sein, wenn nicht klar ist, was M und N sind.

Sei beispielsweise $M = \mathbb{Z}$, $N = {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$, $A = \mathbb{Z}$ und $M' = 2\mathbb{Z}$. Betrachte $x = 2$ und $y = 1$. Dann gilt $2 \otimes 1 = 0$ in $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$, denn $2 \otimes 1 = 2 \cdot 1 \otimes 1 = 1 \otimes 2 \cdot 1 = 0$, aber $2 \otimes 1 \neq 0$ in $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}$, da $[2, 1] \in D \setminus U$. Schönere Begründung (derzeit noch heuristisch): $2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ via $2 \mapsto 1$, und somit

$$\begin{aligned} 2\mathbb{Z} \otimes {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}} &\cong \mathbb{Z} \otimes {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}} \cong {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\mathbb{Z}}, \\ 2 \otimes 1 &\mapsto 1 \otimes 1 \mapsto 1. \end{aligned}$$

ii) Die Abbildung $M \times N \xrightarrow{h} M \otimes_A N$ ist im Allgemeinen nicht surjektiv, aber $\langle \operatorname{im} h \rangle_A = M \otimes_A N$.

Bemerkung 2.26.

i) Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon M' \to N'$ A-linear. Dann ist $M \times M' \xrightarrow{f \times g} N \times N' \to N \otimes_A N'$ A-bilinear; wir erhalten also das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} M \times M' \arrow[r, "f\times g"] \arrow[d] & N \times N' \arrow[d] \\ M \otimes_A M' \arrow[r, dashed, "\exists! f\otimes g"] & N \otimes_A N' \end{tikzcd}$$

ii) Seien $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ A-linear. Dann gilt $(g \circ f) \otimes \mathrm{id}_{M'} = (g \otimes \mathrm{id}_{M'}) \circ (f \otimes \mathrm{id}_{M'})$.

Proposition 2.27. *Seien M, N, P A-Moduln. Dann existieren eindeutig bestimmte Isomorphismen:*

i) $M \otimes_A N \xrightarrow{\cong} N \otimes_A M, x \otimes y \mapsto y \otimes x$

ii) $(M \oplus N) \otimes_A P \xrightarrow{\cong} (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P), (x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$

iii) $(M \otimes_A N) \otimes_A P \xrightarrow{\cong} M \otimes_A (N \otimes_A P), (x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$

iv) $A \otimes_A M \xrightarrow{\cong} M, (a \otimes x) \mapsto ax$

[19. April 2018]

[23. April 2018]

Beweis. Wir beweisen hier nur exemplarisch ii); die anderen Aussagen sind Übungsaufgaben oder lassen sich sehr analog beweisen.

Die Abbildung $(M \oplus N) \times P \to (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P), ((x, y), z) \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$ ist A-bilinear, folglich faktorisiert sie über das Tensorprodukt $(M \oplus N) \otimes_a P$:

$$\begin{tikzcd} (M \oplus N) \times P \arrow[r] \arrow[d] & (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P) \\ (M \oplus N) \otimes_A P \arrow[ur, dashed, "\exists! \lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Folglich gilt: $\lambda((x, y) \otimes z) = (x \otimes z, y \otimes z)$.

Wir konstruieren nun eine Umkehrabbildung. Betrachte hierzu die Abbildungen

$$i_M : M \to M \otimes N, x \mapsto (x, 0)$$
$$i_N : N \to M \otimes N, y \mapsto (0, y)$$

und das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_A P \arrow[r, "i_M \otimes \mathrm{id}_P"] \arrow[dr, "i_{M\otimes_A P}"'] & (M \oplus N) \otimes_A P & N \otimes_A P \arrow[l, "i_N \otimes \mathrm{id}_P"'] \arrow[dl, "i_{N\otimes_A P}"] \\
& (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P) \arrow[u, dashed, "\exists!\lambda'"] &
\end{tikzcd}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\lambda'(x \otimes z, y \otimes z') &= \lambda'(x \otimes z, 0) + \lambda'(0, y \otimes z') \\
&= \lambda'(i_{M\otimes_A P}(x \otimes z)) + \lambda'(i_{N\otimes_A P}(y \otimes z')) \\
&= (i_M \otimes \mathrm{id}_P)(x \otimes z) + (i_N \otimes \mathrm{id}_P)(y \otimes z') \\
&= (x, 0) \otimes z + (0, y) \otimes z',
\end{aligned}$$

also folgt aufgrund der Bilinearität des Tensorprodukts

$$(\lambda \circ \lambda')((x, y) \otimes z) = \lambda'(x \otimes z, y \otimes z) = (x, 0) \otimes z + (0, y) \otimes z = (x, y) \otimes z.$$

Genauso erhalten wir $(\lambda \circ \lambda')(x \otimes z, y \otimes z') = (x \otimes z, y \otimes z')$, also folgt $\lambda' \circ \lambda = \mathrm{id}$ und $\lambda \circ \lambda' = \mathrm{id}$. □

Korollar 2.28. *Sei M bzw. N ein freier A-Modul mit Basis $(x_i)_{i\in I}$ bzw. $(y_j)_{j\in J}$. Dann ist $M \otimes_A N$ ein freier A-Modul mit Basis $(x_i \otimes y_j)_{i\in I, j\in J}$.*

Beweis. Es gilt $M \cong \bigoplus_{i\in I} A$ und $N \cong \bigoplus_{j\in J} A$. Daraus folgt

$$M \otimes_A N \cong \bigoplus_{i\in I} A \otimes_A \bigoplus_{j\in J} A \cong \bigoplus_{i\in I} \underbrace{(A \otimes_A N)}_{\cong N} \cong \bigoplus_{i\in I} \bigoplus_{j\in J} A.$$ □

Proposition 2.29 (Adjunktion von $\otimes$ und Hom)**.** *Seien M, N, P A-Moduln. Dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus von A-Moduln*

$$\begin{aligned}
\Phi\colon \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)), \\
f &\mapsto x \mapsto (y \mapsto f(x \otimes_A y)).
\end{aligned}$$

Beweis. Φ ist wohldefiniert und A-linear. Wir suchen nun eine Umkehrfunktion Ψ : $\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)) \to \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$. Sei $g \in \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P))$. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "(x,y)\mapsto(g(x))(y)"] \arrow[d] & P \\
M \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "\exists!\Psi(g)"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Psi(g)$ ist A-linear, da g und $g(x)$ A-linear sind. Nun folgt

$$\begin{aligned}
(\Psi(g))(x \otimes y) &= (g(x))(y) \\
((\psi \circ \varphi)(f))(x \otimes y) &= ((\varphi(f))(x))(y) = (f(x \otimes _))(y) = f(x \otimes y) \\
((\varphi \circ \psi)(g))(x) &= (\psi(g))(x \otimes _) = (g(x))(_) = g(x).
\end{aligned}$$ □

2.5 Flache Moduln

Definition 2.30. Eine Sequenz von A-Moduln

$$\dots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \dots$$

(Sequenz kann endlich sein, aber auch unendlich nach links, rechts oder nach beiden Seiten) heißt *exakt* wenn $\operatorname{im} f_{i-1} = \ker f_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \text{ exakt} \quad &\iff \quad f \text{ injektiv} \\ M \xrightarrow{g} M' \longrightarrow 0 \text{ exakt} \quad &\iff \quad g \text{ surjektiv} \end{aligned}$$

Eine *kurze exakte Sequenz* ist von der folgenden Form:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \quad \iff \quad f \text{ injektiv, } g \text{ surjektiv, } \operatorname{im} f = \ker g$$

Proposition 2.31.

i) *Sei*

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0 \tag{*}$$

eine Sequenz von A-Moduln mit $g \mapsto g \circ f_i$. Dann sind äquivalent:

a) (*) *ist exakt.*

b) *Für alle A-Moduln N ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{f_2^*} \operatorname{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{f_1^*} \operatorname{Hom}_A(M_1, N)$$

exakt.

ii) *Sei*

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{g_1} N_2 \xrightarrow{g_2} N_3 \tag{**}$$

eine Sequenz von A-Moduln mit $f \mapsto g_i \circ f$. Dann sind äquivalent:

a) (**) *ist exakt.*

b) *Für alle A-Moduln M ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, N_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, N_2) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, N_3)$$

exakt.

iii) *Sei* (*) *wie in* i). *Falls* (*) *exakt und N ein A-Modul ist, so ist die Sequenz*

$$M_1 \otimes_A N \xrightarrow{f_1 \otimes \mathrm{id}_N} M_2 \otimes_A N \xrightarrow{f_2 \otimes \mathrm{id}_N} M_3 \otimes_A N \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis.

zu i) und ii): siehe Übungsblatt 3.

zu iii): Sei (*) exakt und P ein A-Modul. Dann folgt mit i)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(M_3, \operatorname{Hom}_A(N,P)) \arrow[r, "f_2^*"] \arrow[d, "\wr\parallel\ \mathrm{Adj}"] & \operatorname{Hom}_A(M_2, \operatorname{Hom}_A(N,P)) \arrow[r, "f_1^*"] \arrow[d, "\wr\parallel"] & \operatorname{Hom}_A(M_1, \operatorname{Hom}_A(N,P)) \arrow[d, "\wr\parallel"] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(M_3 \otimes_A N, P) \arrow[r, "(f_2 \otimes \mathrm{id}_N)^*"] & \operatorname{Hom}_A(M_2 \otimes_A N, P) \arrow[r, "(f_1 \otimes \mathrm{id}_N)^*"] & \operatorname{Hom}_A(M_1 \otimes_A N, P)
\end{tikzcd}$$

Da die obere Sequenz exakt ist, ist auch die untere Sequenz exakt. Da P beliebig ist, folgt wieder mit i) die gewünschte Exaktheit. □

Bemerkung 2.32.

i) Sei $f\colon M \to M'$ eine surjektive A-lineare Abbildung. Dann ist $f \otimes_A \mathrm{id}_N\colon M \otimes_A N \to M' \otimes_A N$ auch surjektiv.

ii) Ist f injektiv, so ist $f \otimes \mathrm{id}_N$ nicht notwengierweise injektiv. Sei beispielsweise $a \in A \setminus A^\times$ kein Nullteiler. Betrachte $f : A \to A, x \mapsto ax$. Da a kein Nullteiler ist, ist f injektiv. Betrachte nun $N = {}^A\!/\!_{(a)}$ und das folgende (nichtkommutative!) Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_A {}^A\!/\!_{(a)} \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, equal] & A \otimes_A {}^A\!/\!_{(a)} \arrow[d, equal] \\
{}^A\!/\!_{(a)} \arrow[r, "x \mapsto ax"] & {}^A\!/\!_{(a)}
\end{tikzcd}$$

Definition 2.33. Ein A-Modul N heißt *flach* („flat"), wenn für alle A-linearen injektiven Abbildungen $f : M' \to M$ dann auch

$$f \otimes \mathrm{id}_N\colon M' \otimes_A N \to M \otimes_A N$$

injektiv ist.

Beispiel 2.34.

i) Wenn N frei ist, ist N auch flach.

Beweis. Ist N frei, so gilt $\bigoplus_{i \in I} A \cong N$. Sei $f\colon M' \to M$ injektiv. Betrachte nun das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
M' \otimes_A N \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "\wr\parallel"] & M \otimes_A N \arrow[dd, "\wr\parallel"] \\
\bigoplus_{i \in I}(M' \otimes_A A) \arrow[d, "\wr\parallel"] & \\
\bigoplus_{i \in I} M' \arrow[r] & \bigoplus_{i \in I} M \\
(x_i) \arrow[r, mapsto] & (f(x_i))
\end{tikzcd}$$

$\square$

ii) Ist $a \in A \setminus A^\times$ kein Nullteiler, so ist ${}^{A}\!/_{(a)}$ nicht flach.

Proposition 2.35. *Sei N ein A-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) *N ist flach.*

ii) *Falls*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

exakt ist, so ist auch

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

exakt.

iii) *Falls*

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

exakt ist, so ist auch

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \otimes_A N \xrightarrow{f_{i-1} \otimes \mathrm{id}} M_i \otimes_A N \xrightarrow{f_i \otimes \mathrm{id}} M_{i+1} \otimes_A N \longrightarrow \ldots$$

exakt.

Beweis. Die Implikationen „iii) $\Rightarrow$ ii)“ und „ii) $\Rightarrow$ i)“ sind klar. Gelte also i). Betrachte nun das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \\
 & & & \operatorname{im} f_i \arrow[ur] \arrow[d] & \\
 & M_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, "\pi"] & M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[ur, "\tilde{f}_i"] & M_{i+1} & \\
 & {}^{M_{i-1}}\!/_{\ker f_{i-1}} \arrow[ur, "\tilde{f}_{i-1}"] \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[ur] & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Wir nennen die grüne bzw. rote bzw. blaue Sequenz 1 bzw. 2 bzw. 3. Diese sind jeweils exakt. Da N flach ist, bleiben 1, 2 und 3 nach dem Tensorieren ($\widehat{=} \_ \otimes_a N$) exakt. Somit gilt:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{im}(\tilde{f}_{i-1} \otimes \mathrm{id}_N) \arrow[r, equal, "\text{Exaktheit von „}\text{2} \otimes N\text{“}"] \arrow[d, equal, "\text{Exaktheit von „}\text{1} \otimes N\text{“}"'] & \ker(\tilde{f}_i \otimes \mathrm{id}_N) \arrow[d, equal, "\text{Exaktheit von „}\text{3} \otimes N\text{“}"] \\
\operatorname{im}(f_{i-1} \otimes \mathrm{id}_N) & \ker(f_i \otimes \mathrm{id}_N)
\end{tikzcd}$$

Wir beweisen $\operatorname{im}(\tilde{f}_{i-1} \otimes \mathrm{id}_N) = \operatorname{im}(f_{i-1} \otimes \mathrm{id}_N)$ noch genauer.

„$\supseteq$“ Klar.

„$\subseteq$“ Sei $x \in \operatorname{im}(\tilde{f}_{i-1} \otimes \mathrm{id}_N)$. Dann existiert ein $y \in M_{i-1}/\ker f_{i-1}$ mit $(\tilde{f}_{i-1} \otimes \mathrm{id}_N)(y) = x$. Da $\pi \otimes \mathrm{id}_N$ surjektiv ist, existiert ein $z \in M_{i-1} \otimes N$ mit $(\pi \otimes \mathrm{id}_N)(z) = y$. Dann gilt $x = (\tilde{f}_{i-1} \otimes \mathrm{id}_N)((\pi \otimes \mathrm{id}_N)(z)) = (f_{i-1} \otimes \mathrm{id}_N)(z)$.

Somit gilt iii). $\square$

[23. April 2018]

[26. April 2018]

3 Algebren

3.1 Grundbegriffe

Definition 3.1. Sei A ein Ring. Eine A-*Algebra* ist Paar (B, φ), wobei B ein Ring und $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus ist. Wir nennen die A-Algebra (B, φ) auch kurz B.

Bemerkung 3.2.

i) Jeder Ring ist eine $\mathbb{Z}$-Algebra auf eindeutige Art.

ii) Ist B eine A-Algebra, so ist ${}_AB$ ein A-Modul. Die Multiplikation $B \times B \to B$ ist A-bilinear.

iii) Wenn B eine A-Algebra und C eine B-Algebra ist, dann ist C auch eine A-Algebra (durch Verknüpfung der Abbildungen).

Definition 3.3. Seien $(B, \varphi_B), (C, \varphi_C)$ A-Algebren. Ein Ringhomomorphismus $f\colon B \to C$ heißt A-*Algebrenhomomorphismus*, wenn folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "f"] & C \\
A \arrow[u, "\varphi_B"] \arrow[ur, "\varphi_C"'] &
\end{tikzcd}$$

Beispiel 3.4. Sei B eine A-Algebra und $b \in B$. Betrachte den Ringhomomorphismus $\mathrm{ev}_b \colon A[t] \to B$. Dann kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} A[t] \arrow[r, "\mathrm{ev}_b"] & B \\ A \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Folglich ist ev_b ein A-Algebrenhomomorphismus.

Definition 3.5. Sei B eine A-Algebra. B heißt *endlich erzeugte A-Algebra*, wenn ein $n > 0$ sowie $b_1, \ldots, b_n \in B$ existieren, sodass

$$\mathrm{ev}_{b_1,\ldots,b_n} \colon A[t_1, \ldots, t_n] \longrightarrow B$$

surjektiv ist.

Bemerkung 3.6. Sei B eine A-Algebra. Falls ${}_AB$ ein endlich erzeugter A-Modul ist, dann ist B eine endlich erzeugte A-Algebra; die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch (Gegenbeispiel ist z.B. der Polymomring).

Lemma 3.7. *Sei B eine A-Algebra und N ein B-Modul. Falls N ein endlich erzeugter B-Modul und ${}_AB$ endlich erzeugt als A-Modul ist, dann ist ${}_AN$ endlich erzeugt als A-Modul.*

Beweis. Sei $\{y_1, \ldots, y_n\}$ Erzeugendensystem von N als B-Modul und $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ein Erzeugendensystem von B als A-Modul. Dann ist aber $\{x_i y_i\}$ Erzeugendensystem von ${}_AN$ als A-Modul. $\square$

3.2 Skalarerweiterung

Bemerkung. Sei M ein A-Modul, B eine A-Algebra. Betrachte $B \otimes_A M$. Fixiere $b' \in B$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} B \times M & \longrightarrow & B \times M & \longrightarrow & B \otimes_A M \\ (b, x) & \longmapsto & (b'b, x) & \longmapsto & b'b \otimes x \end{array}$$

Diese Abbildung ist bilinear ($\otimes_A$ ist A-bilinear, Multiplikation auf B ist A-bilinear).

$$\begin{tikzcd} B \times M \arrow[r, "(b,x)\mapsto(b'b,x)"] \arrow[d] & B \times M \arrow[d] \\ B \otimes_A M \arrow[r, dashed, "\exists! m_{b'}\ A\text{-linear}"'] & B \otimes_A M \end{tikzcd}$$

Definition 3.8. Definiere nun

$$\begin{aligned} m \colon B \times B \otimes_A M &\longrightarrow B \otimes_A M \\ (b', y) &\longmapsto m_{b'}(y) \end{aligned}$$

Behauptung: $(B \otimes_A M, +, \cdot)$ ist ein B-Modul (wobei die Multiplikation durch m definiert wird).

Beweis. Wir zeigen exemplarisch die Assoziativität: Seien $b'', b' \in B$ und $y \in B \otimes_A M$. Zeige $m(b'', m(b', y)) = m(b''b', y)$. Sei $y = \sum b_i \otimes x_i$ für $b_i \in B, x_i \in M$. Dann ist $m(b'', m(b', \sum b_i \otimes x_i)) = m(b'', \sum b'b_i \otimes x_i) = \sum b''b'b_i \otimes x_i = m(b''b', \sum b_i \otimes x_i)$. □

$B \otimes_A M$ heißt *Skalarerweiterung* von M nach B. („extension of scalars")

Bemerkung 3.9. Sei $f\colon M \to N$ A-linear und B eine A-Algebra. Dann ist

$$\mathrm{id}_B \otimes f\colon B \otimes_A M \to B \otimes_A N$$

eine B-lineare Abbildung.

Beweis. Sei $b' \in B, y = \sum b_i \otimes x_i \in B \otimes_A M$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_B \otimes f)\left(b' \cdot \left(\sum b_i \otimes x_i\right)\right) &= (\mathrm{id}_B \otimes f)\left(\sum b'b_i \otimes x_i\right) = \sum \mathrm{id}_B(b'b_i) \otimes f(x_i)\\ &= \sum b'b_i \otimes f(x_i) = b'\left(\sum b_i \otimes f(x_i)\right) = b'(\mathrm{id}_b \otimes f)\left(\sum b_i \otimes x_i\right).\end{aligned}$$ □

Satz 3.10 (Adjunktion von Skalarerweiterung und Restriktion der Skalare)**.** *Sei B eine A-Algebra, M ein A-Modul und N ein B-Modul.*

i) *Sei $f\colon M \to {}_AN$ A-linear. Dann existiert genau eine B-lineare Abbildung*

$$f_B\colon B \otimes_A M \to N$$

mit $f_B(b \otimes x) = bf(x)$.

ii) *Die Abbildung $\Phi\colon \mathrm{Hom}_A(M, {}_AN) \to \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N), f \mapsto f_B$ ist A-linear und bijektiv.*

Beweis.

i) Betrachte $B \times M \to N, (b, x) \mapsto bf(x)$. Diese Abbildung ist A-bilinear, da f A-linear und B eine A-Algebra ist. Folglich kommutiert

$$\begin{tikzcd} B \times M \arrow[r] \arrow[d] & N \\ B \otimes_A M. \arrow[ur, "\exists! f_B\ A\text{-linear}"'] & \end{tikzcd}$$

Es verbleibt die B-Linearität von f_B zu zeigen, was analog zu Bemerkung 3.9 geschieht.

ii) Wir konstruieren eine Umkehrabbildung $\Psi\colon \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, {}_AN)$. Sei $g\colon B \otimes_A M \to N$. Definiere $\Psi(g) := g(1 \otimes \_)\colon M \to N, x \mapsto g(1 \otimes x)$. Dabei ist $g(1 \otimes \_)$ tatsächlich A-linear, da $g(1 \otimes ax) = g(a(1 \otimes x)) = ag(1 \otimes x)$ gilt.

Zeige nun noch $(\Psi \circ \Phi)(f) = f$ und $(\Phi \circ \Psi)(g) = g$. Hierzu gilt

$$((\Psi \circ \Phi)(f))(x) = (\Phi(f))(1 \otimes x) = f_b(1 \otimes x) = 1 \cdot f(x)$$

und

$$((\Phi \circ \Psi)(g))(b \otimes x) = (\Psi(g))_B(b \otimes x) = b \cdot (\Psi(g))(x) = b \cdot g(1 \otimes x) = g(b \otimes x).$$

Kurzes Nachrechnen liefert schließlich, dass Φ auch A-linear ist. □

Lemma 3.11. *Sei B eine A-Algebra, N ein B-Modul und M ein A-Modul.*

i) *$N \otimes_A M$ ist ein B-Modul via $b \cdot (\sum y_i \otimes x_i) = \sum by_i \otimes x_i$.*

ii) *Es existiert ein eindeutiger Isomorphismus $N \otimes_A M \to N \otimes_B (B \otimes_A M)$ von B-Moduln mit $y \otimes x \mapsto y \otimes (1 \otimes x)$.*

Beweis.

i) So wie bei der Erweiterung der Skalare.

ii) Übung. □

Proposition 3.12. *Sei B eine A-Algebra, C eine B-Algebra und M ein A-Modul. Dann existiert genau ein Isomorphismus*

$$C \otimes_A M \longmapsto C \otimes_B (B \otimes_A M)$$

von C-Moduln mit $c \otimes x \mapsto c \otimes (1 \otimes x)$.

Beweis. Nach Lemma 3.11 existiert genau ein Isomorphismus von B-Moduln

$$f \colon C \otimes_A M \longrightarrow C \otimes_B (B \otimes_A M)$$

mit $f(c \otimes x) = c \otimes (1 \otimes x)$. Wir zeigen noch, dass f C-linear ist. Sei $z = \sum c_i \otimes x_i$ mit den $c_i \in C$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f(c\sum c_i \otimes x_i) &= f\left(\sum cc_i \otimes x_i\right) = \sum f(cc_i \otimes x_i) = \sum cc_i \otimes (1 \otimes x_i) \\ &= c\sum c_i \otimes (1 \otimes x_i). \end{aligned}$$

□

Satz 3.13. *Sei B eine A-Algebra, M ein A-Modul sowie (P) eine der folgenden Eigenschaften:*

i) *frei*

ii) *endlich erzeugt*

iii) *endlich präsentiert*

iv) *flach*

Dann gilt: Falls M die Eigenschaft (P) als A-Modul hat, hat $B \otimes_A M$ die Eigenschaft (P) als B-Modul.

Beweis.

i) Sei M ein freier A-Modul. Folglich gilt $M \cong \bigoplus_{i \in I} A$ und wir erhalten

$$B \otimes_A M \cong B \otimes \left(\bigoplus_{i \in I} A \right) \cong \bigoplus_{i \in I} (B \otimes_A A) \cong \bigoplus_{i \in I} B$$

als B-Moduln mit Bemerkung 3.9.

ii) Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann existiert eine surjektive, A-lineare Abbildung $f\colon A^n \to M$. Folglich ist

$$\mathrm{id}_B \otimes f\colon B \otimes_A A^n \to B \otimes_A M$$

surjektiv nach Proposition 2.31 und B-linear nach Bemerkung 3.9. Aber wir haben eben gesehen, dass $B \otimes_A A^n \cong B^n \Rightarrow B \otimes_A M$ endlich erzeugt ist.

iii) Sei M als A-Modul endlich präsentiert. Dann existiert eine surjektive Abbildung $f\colon A^n \to M$ mit endlich erzeugtem Kern, weshalb wiederum eine surjektive Abbildung $g\colon A^m \to \ker f$ existiert. Betrachte nun $g'\colon A^m \to \ker f \to A^n$, hierbei gilt $\operatorname{im} g' = \ker f$. Somit existiert eine exakte Sequenz der Form

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Aus Proposition 2.31 folgt nun, dass es die folgende exakte Sequenz gibt:

$$B \otimes A^m \longrightarrow B \otimes A^n \longrightarrow B \otimes_A M \longrightarrow 0$$

Damit ist auch $B \otimes_A M$ endlich präsentiert als B-Modul.

iv) Übungsblatt 3. □

[26. April 2018]

[30. April 2018]

Satz 3.14. *Seien A ein Ring sowie B und C A-Algebren.*

i) *Es existiert eine eindeutig bestimmte A-bilineare Abbildung*

$$m\colon B \otimes_A C \times B \otimes_A C \longrightarrow B \otimes_A C$$

mit $m(b \otimes c, b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$.

ii) *$(B \otimes_A C, +, m)$ ist ein Ring (und sogar eine A-Algebra).*

iii) *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow B \otimes_A C & \qquad C &\longrightarrow B \otimes_A C \\ b &\longmapsto b \otimes 1 & c &\longmapsto 1 \otimes c \end{aligned}$$

sind Ringhomomorphismen.

iv) *Das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A C & B \arrow[l, "b \mapsto b\otimes 1"'] \\ C \arrow[u, "c \mapsto 1 \otimes c"] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

v) *Sei D ein Ring sowie $B \xrightarrow{\varphi} D$ und $C \xrightarrow{\psi} D$ Ringhomomorphismen, sodass*

$$\begin{tikzcd} D & B \arrow[l, "\varphi"] \\ C \arrow[u, "\psi"] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutiert, dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $\lambda\colon B \otimes_A C \to D$ mit

$$\begin{tikzcd} D & & \\ & B \otimes_A C \arrow[ul, dashed, "\exists ! \lambda"] & B \arrow[l] \arrow[ull, bend right, "\varphi"'] \\ & C \arrow[u] \arrow[uul, bend left, "\psi"] & A. \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Beweis.

i) Betrachte für $(b, c) \in B \times C$ die A-bilineare Abbildung $B \times C \to B \otimes_A C, (b'c') \mapsto bb' \otimes cc'$ mit

$$\begin{tikzcd} B \times C \arrow[r] \arrow[d] & B \otimes_A C \\ B \otimes_A C. \arrow[ur, dashed, "\exists ! \varphi_{(b,c)}\ A\text{-linear}"'] & \end{tikzcd}$$

Daraus folgt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \times C \arrow[r, "(b,c) \mapsto \varphi_{(b,c)}"] & \mathrm{Hom}_A(B \otimes_A C, B \otimes A, C) A - \text{bilinear} \\ B \otimes_A C \arrow[ur, dashed, "\exists ! \varphi\ A\text{-linear}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Nach Definition von Φ gilt nun

$$m(b \otimes c, b' \otimes c') = (\varphi(b \otimes c))(b' \otimes c') = \varphi_{(b,c)}(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

ii) Nachrechnen mit i) und Rechenregeln für $\otimes$, wobei $1_{B \otimes_A C} = 1 \otimes 1$ zu beachten ist.

iii) Die Abbildungen $\varphi_B \colon B \to B \otimes_A C, b \mapsto b \otimes 1$ erfüllt $\varphi_B(1) = 1$ und $\varphi_B(bb') = \varphi_B(b)\varphi_B(b')$.

iv) Für $a \in A$ gilt: $a \otimes_A 1 = a \cdot (1 \otimes_A 1) = 1 \otimes_A a$.

v) Existenz von λ: Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} B \times C & \longrightarrow & D \\ (b, c) & \longmapsto & \varphi(b) \cdot \psi(c) \end{array}$$

Sie ist A-bilinear und faktorisiert damit über das Tensorprodukt zu $\lambda \colon B \otimes_A C \to D$ A-linear. Zeige nun: λ ist Ringhomomorphismus. Dazu $b, b' \in B, c, c' \in C$:

$$\lambda((b \otimes c)(b' \otimes c')) = \varphi(b)\varphi(b')\psi(c)\psi(c') = \lambda(b \otimes c)\lambda(b' \otimes c')$$

Bemerkung. Seien R, S beide A-Algebren, $\lambda \colon R \to S$ sei A-linear, sei $\{x_i\}$ Erzeugendensystem von R als A-Modul. Falls $\lambda(x_i, x_j) = \lambda(x_i)\lambda(x_j)$ und $\lambda(1) = 1$, also ist λ ein Ringhomomorphismus.

Nun zur Eindeutigkeit: Sei λ' ein weiterer Ringhomomorphismus wie oben. Dann ist λ' A-linear, reicht also auf reinen Tensoren zu prüfen.

$$\lambda'(b \otimes c) = \lambda'((b \otimes 1) \cdot (1 \otimes c)) = \varphi(b) \cdot \psi(c) = \lambda(b \otimes c)$$

wobei die vorletzte Gleichheit daraus folgt, dass λ' Ringhomomorphismus ist, sodass das Diagramm kommutiert. $\square$

Beispiel 3.15. Sei B eine A-Algebra und $C = A[t]$. Dann ist $B \otimes_A A[t] \cong B[t]$ (als A-Algebra, da

$$\begin{array}{ccc} B[t] & \longleftarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A[t] & \longleftarrow & A \end{array}$$

kommutiert und $B[t]$ dafür universell ist.

4 Moduln über Hauptidealringen

Es sei an dieser Stelle nochmals auf folgende Literatur verwiesen:

[Lan02] Serge Lang. *Algebra*. Springer New York, 2002.

[Hun80] Thomas W. Hungerford. *Algebra*. Springer New York, 1980.

Zur Erinnerung: Sei A ein Ring. A heißt Hauptidealring („principle ideal domain"), falls A ein Integritätsbereich und jedes Ideal ein Hauptideal ist. Wir wissen, dass jeder Hauptidealring faktoriell ist.

Sei M endlich erzeugter A-Modul. Unser Ziel ist es, M als direkte Summe in A-Moduln, die sich nicht weiter zerlegen lassen, zu zerlegen. Unsere Hauptanwendung wird dann sein: Betrachte $A = k[t]$, k Körper, $M =$ Modul assoziiert zu (V, ψ), wobei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum ist und $\psi \in \operatorname{End}_k(V)$.

4.1 Freie Moduln

Bemerkung 4.1. Sei F ein freier A-Modul und $\{x_i\}_{i\in I}, \{y\}_{j\in J}$ Basen von F. Dann existiert eine Bijektion zwischen I und J.

Beweis. Übungsblatt 3. □

Wir werden die folgende Notation verwenden: $\operatorname{rk} F := |I| \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ heißt *Rang von* F.

Satz 4.2. *Sei A ein Hauptidealring, F freier A-Modul, $M \subseteq F$ Untermodul. Dann ist M frei und* $\operatorname{rk} M \leq \operatorname{rk} F$.

Beweis. Wir beweisen das nur für den Fall $\operatorname{rk} F < \infty$ (siehe [Hun80, Theorem 6.1] für den allgemeinen Fall).

Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ Basis von F ($\operatorname{rk} F = n$). Für $r \in \{1, \dots n\}$ definiere

$$M_r := \langle x_1, \dots, x_r \rangle_A \cap M.$$

Wir behaupten, dass M_r frei und $\operatorname{rk} M_r \leq r$ ist, und zeigen dies per Induktion nach r.

$r = 1$: Wir haben $M_1 = \langle x_1 \rangle_A \cap M$; dann gibt es einen Isomorphismus $\varphi\colon A \xrightarrow{\cong} \langle x_1 \rangle, a \mapsto ax_1$. Folglich ist $\varphi^{-1}(M_1) \subseteq A$ ein Ideal und es existiert ein $a \in A$ mit $\varphi^{-1}(M_1) = (a)$; es folgt also

$$M_1 = \langle ax_1 \rangle \cong \begin{cases} A & a \neq 0, \\ 0 & a = 0. \end{cases}$$

Beachte dabei: $\{x_1\}$ ist linear unabhängig, also $ax_1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$.

$r \to r+1$: Betrachte

$$I = \{a \in A \mid \exists a_1, \dots, a_r \in A : a_1x_1 + \dots a_rx_r + ax_{r+1} \in M\}.$$

Dabei ist $I \subseteq A$ ein Ideal, es existiert also ein $a_{r+1} \in A$ mit $I = (a_{r+1})$.

1. Fall: $a_{r+1} = 0$. Dann ist $M_{r+1} = M_r$ frei (nach Induktionsannahme) sowie $\operatorname{rk} M_{r+1} \leq r$.
2. Fall: $a_{r+1} \neq 0$. Es existieren also $a_0, \ldots, a_r \in A$ mit $w := a_1x_1 + \cdots + a_rx_r + a_{r+1}x_{r+1} \in M$.

   Nun ist unser Ziel, $M_{r+1} = M_r \oplus \langle w \rangle$ zu zeigen.

   Sei also $x \in M_{r+1}$. Somit existieren $b_1, \ldots, b_{r+1} \in A$, sodass $x = b_1x_1 + \cdots + b_{r+1}x_{r+1}$. Dann folgt $b_{r+1} \in I = (a_{r+1})$, es existiert also ein $c \in A$ mit $b_{r+1} = ca_{r+1}$. Betrachte nun $v := x - cw$. Für v gilt dann

   $$v = \sum_{i=1}^{r}(b_i - ca_i)x_i + (b_{r+1} - ca_{r+1})x_{r+1} \in \langle x_1, \ldots, x_r \rangle M = M_r.$$

   Also gilt $x = v + cw \in M_r + \langle w \rangle$.

   Schließlich gilt $M_r \cap \langle w \rangle = \{0\}$, da für $x \in M_r \cap \langle w \rangle$ dann $x = bw = ba_1x_1 + \ldots ba_{r+1}x_{r+1} \xRightarrow{x \in M_r} ba_{r+1} = 0$ folgt, also $b = 0$ gilt, da $a_{r+1} \neq 0$.

   Insgesamt erhalten wir tatsächlich $M_{r+1} = M_r \oplus \langle w \rangle$ frei vom Rang $\leq r+1$. □

Korollar 4.3. *Sei A Hauptidealring, M endlich erzeugter A-Modul und $M' \subseteq M$ Untermodul. Dann ist M' endlich erzeugt.*

Beweis. Da M endlich erzeugt ist, existiert ein freier A-Modul F mit $\operatorname{rk} F < \infty$ und eine surjektive, A-lineare Abbildung $f\colon F \to M$. Betrachte $f^{-1}(M') \subseteq F$. Nach Satz 4.2 ist $F' := f^{-1}(M')$ nun frei und es gilt $\operatorname{rk} F' \leq \operatorname{rk} F < \infty$ und $f|_{F'}\colon F' \to M'$ ist somit surjektiv, also ist M' endlich erzeugt. □

4.2 Zerlegung in freien Anteil und Torsionsanteil

Definition 4.4. Sei A ein Integritätsbereich und M ein A-Modul.

i) Sei $x \in M$. x heißt *Torsionselement* genau dann, wenn es ein $a \in A \setminus \{0\}$ gibt, sodass $ax = 0$ gilt.

ii) $M_{\text{tor}} := \{x \in M \mid x \text{ ist ein Torsionselement}\} \subseteq M$ ist ein Untermodul, da A nullteilerfrei ist.

iii) M heißt *Torsionsmodul* genau dann, wenn $M = M_{\text{tor}}$. M heißt *torsionsfrei* genau dann, wenn $M_{\text{tor}} = \{0\}$.

Lemma 4.5. *Sei A Integritätsbereich und M ein A-Modul. Dann ist ${}^{M}/_{M_{\text{tor}}}$ torsionsfrei.*

Beweis. Sei $x + M_{\text{tor}} \in {}^{M}/_{M_{\text{tor}}}$. Angenommen, es existiert ein $a \in A, a \neq 0$ mit $a(x + M_{\text{tor}}) = 0 + M_{\text{tor}}$. Dann folgt $ax \in M_{\text{tor}}$, es existiert also ein $b \in A, b \neq 0$ mit $bax = 0$. Da $ba \neq 0$ gilt, muss schon $x \in M_{\text{tor}}$ gelten. □

Bemerkung 4.6.

i) Sei M ein Modul über einem Integritätsbereich. Ist M frei, so ist M auch torsionsfrei.

ii) Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. Dazu sei A ein Integritätsbereich und $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann ist I torsionsfrei (klar), aber nur genau dann ein freier A-Modul, wenn I ein Hauptideal ist.

   Beweis. Für die Hinrichtung sei I frei mit $\{x_i\}_{i\in J}$. Angenommen, $|J| \geq 2$. Dann existieren $i_1 \neq i_2 \in J$. Mit $a_1 = x_{i_2}$ und $a_2 = x_{i_1}$ gilt $a_1 x_{i_1} + a_2 x_{i_2} = 0$; x_{i_1} und x_{i_2} sind also linear abhängig.

   Für die Rückrichtung betrachten wir das folgende Lemma. □

Lemma 4.7. *Sei A ein Hauptidealring. Ist M ein endlich erzeugter, torsionsfreier A-Modul, so ist M frei.*

[30. April 2018]

[3. Mai 2018]

Beweis. Sei $\{x_1, \ldots, x_m\}$ ein Erzeugendensystem von M. Seien $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m$ maximal, sodass $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ linear unabhängig ist.

Wir behaupten, dass für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ ein $a_j \in A \setminus \{0\}$ existiert, sodass $a_j x_j \in \langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\rangle$. Der Fall $j \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ ist klar. Sei also $j \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$. Dann ist $\{x_{i_1}, \ldots x_{i_n}, x_j\}$ linear abhängig. Folglich existieren $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}, a_j \in A$ sodass $a_{i_1} x_{i_1} + \cdots + a_{i_n} x_{i_n} + a_j x_j = 0$, wobei nicht alle $a_i = 0$ sind. Also gilt $a_j \neq 0$ (sonst wären $x_{i_1}, \ldots x_{i_n}$ linear abhängig).

Betrachte $a := a_1 \ldots a_m \in A \setminus \{0\}$. Dann gilt $aM \subseteq \langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\rangle \cong A^n$ (frei). Betrachte

$$\begin{aligned} \varphi\colon M &\longrightarrow M, \\ x &\longmapsto ax. \end{aligned}$$

φ ist A-linear und injektiv, da $a \neq 0$ und M torsionsfrei ist. Weiterhin ist $\operatorname{im}\varphi = aM \subseteq \langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\rangle$ frei. Folglich gilt $M \cong \operatorname{im}\varphi$, wobei letzteres ein Untermodul eines freien Moduls, also nach Satz 4.2 selber frei ist. □

Lemma 4.8. *Sei A ein Ring und $f\colon M \to N$ eine surjektive, A-lineare Abbildung mit N frei. Dann existiert ein Untermodul $M' \subseteq M$ mit $M = \ker f \oplus M'$. Insbesondere ist $M' \hookrightarrow M \xrightarrow{f} N$ ein Isomorphismus, also ist M' frei.*

Beweis. Sei $\{y_j\}$ ene Basis von N. Wähle $x_j \in M$ mit $f(x_j) = y_j$. Betrachte $M' = \langle x_j\rangle_A$. Es gilt $M = M' + \ker f$. Dazu sei $x \in M$. Dann existieren $a_j \in A$ mit $f(x) = \sum a_j y_j$. Dann ist $x' = \sum a_j x_j \in M'$ und $f(x') = \sum a_j y_j = f(x)$, also liegt $x - x' \in \ker f$ und es folgt $x = x' + (x - x') \in M' + \ker f$.

Es verbleibt, $M' \cap \ker f = \{0\}$ zu zeigen. Sei $x' = \sum a_j x_j \in M'$ mit $f(x') = 0$. Daraus folgt $0 = \sum a_j y_j$, aber da die y_j sind linear unabhängig, sind alle $a_j = 0$ und es folgt $x' = 0$. □

Satz 4.9. *Sei A ein Hauptidealring, M endlich erzeugter A-Modul. Dann existiert ein Untermodul $M' \subseteq M$ mit:*

- $M = M' \oplus M_{\text{tor}}$
- $M' \cong {}^{M}/_{M_{\text{tor}}}$ *ist endlich frei.*

Beweis. Betrachte $\pi\colon M \to {}^{M}/_{M_{\text{tor}}}$ (surjektiv). Nach Lemma 4.5 ist ${}^{M}/_{M_{\text{tor}}}$ torsionsfrei. Mit Lemma 4.7 folgt ${}^{M}/_{M_{\text{tor}}}$ frei und nach Lemma 4.8 existiert ein $M' \subseteq M$ mit $M = M' \oplus M_{\text{tor}}$ (endlich erzeugt). □

4.3 Primärzerlegung

Definition 4.10. Sei A ein Ring sowie M ein A-Modul.

i) $\operatorname{Ann}_A(M) := \{a \in A \mid \forall x \in M : ax = 0\} \subseteq A$ (ein Ideal) heißt der *Annullator* von M (auch Annihilator)

ii) Für $x \in M$ sei $\operatorname{Ann}_A(x) := \operatorname{Ann}_A(\langle x \rangle) = \{a \in A \mid ax = 0\}$.

iii) Sei $a \in A$. Definiere $M_a := \{x \in M \mid ax = 0\} \subseteq M$ (ein Untermodul).

Lemma 4.11. *Sei M ein A-Modul.*

i) *Sei $f\colon M \to N$ A-linear. Falls f injektiv ist, so gilt* $\operatorname{Ann}(M) \supseteq \operatorname{Ann}(N)$. *Falls f surjektiv ist, so gilt* $\operatorname{Ann}(M) \subseteq \operatorname{Ann}(N)$.

ii) *Sei $M = M' + M''$. Dann gilt* $\operatorname{Ann}(M) = \operatorname{Ann}(M') \cap \operatorname{Ann}(M'')$.

iii) *Sei A ein Integritätsbereich und M ein endlich erzeugter Torsionsmodul. Dann ist* $\operatorname{Ann}(M) \neq (0)$.

Beweis. Siehe Übungsblatt 4. □

Lemma 4.12. *Sei A ein Hauptidealring und seien $a_1, \dots, a_n \in A$ paarweise teilerfremd (also $(a_i, a_j) = (1)$ für $i \neq j$) sowie $a = a_1 \dots a_n$. Sei M der A-Modul mit $M = M_a$. Dann folgt $M_a = M_{a_1} \oplus \dots \oplus M_{a_n}$.*

Beweis. Definiere $b_i := \frac{a}{a_i} = \prod_{j \neq i} a_j$. Dann gilt bereits $(b_1, \dots, b_n) = (1)$. Denn sonst würde ein primes $p \in A$ existieren, welches alle b_i teilt. p teilt also insbesondere $b_1 = \prod_{j=2}^n a_j$, es existiert also ein $j \geq 2$ mit $p \mid a_j$. Da $p \mid b_j$, existiert ein $k \neq j$ mit $p \mid a_k$, was ein Widerspruch zu $1 = \gcd(a_j, a_k)$ ist.

Es existieren also $d_1, \dots, d_n \in A$ mit $\sum d_i b_i = 1$. Wir zeigen nun $M = M_{a_1} + \dots + M_{a_n}$. Sei $x \in M$. Betrachte $a_i d_i b_i x$. Es gilt $a_i d_i b_i x = d_i a x = 0$, also $d_i b_i x \in M_{a_i}$. Wir erhalten folglich

$$x = \sum d_i b_i x \in \sum M_{a_i}.$$

Zeige nun noch $M_{a_i} \cap \sum_{j \neq i} M_{a_j} = \{0\}$. Sei $x \in M_{a_i} \cap \sum_{j \neq i} M_{a_j}$. Dann gilt $a_i x = 0$ und $b_i x = 0$, da $x = \sum_{j \neq i} x_j$ mit $x_j \in M_j$.

Da $(a_i, b_i) = (1)$, existieren $c, d \in A$ mit $ca_i + db_i = 1$, also $x = ca_i x + db_i x = 0$. □

Definition 4.13. Sei A ein Hauptidealring und $p \in A$ prim. Definiere

$$M(p) := \{x \in M \mid \exists r \geq 0 : p^r x = 0\} = \bigcup_{r \geq 0} M_{p^r},$$

einen Untermodul von M. Falls M endlich erzeugt ist, existiert ein $r \geq 0$ mit $M_{p^r} = M(p)$. Es folgt $p^r \in \operatorname{Ann}(M(p))$, also $\operatorname{Ann}(M(p)) \supseteq (p^r)$, und es existiert ein $s \leq r$ mit $\operatorname{Ann}(M) = (p^s)$, da A ein Hauptidealring ist. In diesem Fall gilt $M_{p^{s-1}} \subsetneq M_{p^s} = M(p)$.

M heißt *primär*, falls ein primes $p \in A$ mit $M = M(p)$ existiert.

Satz 4.14 (Primärzerlegung von Torsionsmoduln über Hauptidealringen)**.** *Sei A ein Hauptidealring und M endlich erzeugter Torsionsmodul über A. Dann existiert ein $a \neq 0$ mit $\operatorname{Ann}(M) = (a)$. Seien $p_1, \ldots, p_n \in A$ prim mit $(p_i, p_j) = (1)$ für alle $i \neq j$ und $r_1, \ldots, r_n \geq 1$ mit $a = p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n}$. Dann gilt*

i) $M = M(p_1) \oplus \cdots \oplus M(p_n)$

ii) $\operatorname{Ann}(M(p_i)) = (p_i^{r_i})$

Beweis.

i) Da die $p_1^{r_1}, \ldots, p_n^{r_n}$ paarweise teilerfremd sind, folgt $M = M_{p_1^{r_1}} \oplus \cdots \oplus M_{p_n^{r_n}}$ nach Lemma 4.12. Es bleibt $M_{p_i^{r_i}} = M(p_i)$ zu zeigen.

„$\subseteq$": Klar.

„$\supseteq$": Sei $x \in M(p_i)$; es existiert also ein $r \geq 0$ mit $p_i^r = 0$. Ist $r \leq r_i$, so gilt $p_i^{r_i} x = 0$, also $x \in M_{p_i^{r_i}}$. Sei umgekehrt $r > r_i$. Dann gilt $\gcd(p_i^r, a) = p_i^{r_i}$, es existieren also $c, d \in A$ mit $cp_i^r + da = p_i^{r_i}$. Damit folgt $p_i^{r_i} x = cp_i^r x + dax = 0$, also auch hier $x \in M_{p_i^{r_i}}$.

ii) Es gilt $(p_i^{r_i}) \subseteq \operatorname{Ann}(M_{p_i^{r_i}}) = \operatorname{Ann}(M(p_i))$ nach Teil i). Somit gilt $\operatorname{Ann}(M(p_i)) = (p_i^{s_i})$ für $s_i \leq r_i$. Da $M = M(p_1) \oplus \cdots \oplus M(p_n)$, gilt $\operatorname{Ann}(M) = \bigcap \operatorname{Ann}(M(p_i)) \ni p_i^{s_i} \ldots p_n^{s_n}$, aber es gilt auch $\operatorname{Ann}(M) = (p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n})$.

Da $(p_i, p_j) = (1)$ für $i \neq j$, folgt $r_i \leq s_i$. $\square$

Bemerkung 4.15. $M(p_i)$ im Satz ist nach Lemma 4.12 von der Form $b_i M$, wobei $b_i = \frac{a}{p_i^{r_i}}$.

Definition 4.16. Ein A-Modul M heißt *zyklisch*, wenn ein $x \in M$ mit $M = \langle x \rangle_A$ existiert.. Es gilt $M \cong A/\operatorname{Ann}(x)$ (siehe Übungsblatt 4).

Satz 4.17 (Zerlegung von primären Moduln in zyklische Moduln)**.** *Sei A ein Hauptidealring sowie M ein primärer, endlich erzeugter A-Modul. Sei $p \in A$ mit $\operatorname{Ann}(M) = (p^r)$. Dann existieren ganze Zahlen $1 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_l = r$ und Untermoduln $M_1, \ldots, M_l \subseteq M$ mit*

i) $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_l$ *und*

ii) M_j *zyklisch mit* $\operatorname{Ann}(M_j) = (p^{s_j})$.

Beweis. Sei n die maximale Anzahl von Erzeugern von M.

$n = 1$: Klar.

$n - 1 \to n$: Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem von M. Nach Lemma 4.11 ist $(p^r) = \operatorname{Ann}(M) = \bigcap \operatorname{Ann}(x_i)$. Es existieren also Elemente $t_i \leq r$ mit $\operatorname{Ann}(x_i) = (p^{t_i})$, weshalb wiederum x_i mit $\operatorname{Ann}(x_i) = (p_i^r)$ existieren. Setze $U := \langle x_n \rangle$ und $N = {}^{M}\!/_{U}$. Betrachte $\pi \colon M \to N$. Da π surjektiv ist, gilt $\operatorname{Ann}(M) \subseteq \operatorname{Ann}(N)$, und wir erhalten ein $s \leq r$ mit $\operatorname{Ann}(N) = (p^s)$.

Es gilt $N = \langle \pi(x_1), \dots, \pi(x_{n-1}) \rangle$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren Untermoduln $N_1, \dots, N_k \subseteq N$ und Elemente $1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = s$ mit $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$ und N_j zyklisch mit $\operatorname{Ann}(N_j) = (p^{t_j})$.

[3. Mai 2018]

[7. Mai 2018]

Fixiere $j \in \{1, \dots, k\}$ und sei $y \in N_j$ mit $N_j = \langle y \rangle$. Wähle $x \in M$ mit $\pi(x') = y$. Dann gilt $\pi(p^{t_j} x') = p^{t_j} y = 0$, also $x'' := p^{t_j} x' \in U$. Da aber $\operatorname{Ann}(M) = (p^r)$, folgt $0 = p^r x' = p^{r - t_j} x''$.

Lemma. Sei L ein zyklischer A-Modul mit $\operatorname{Ann}(L) = (p^r)$, $v \in L$ und $s \leq r$. Falls $p^s v = 0$ gilt, so existiert ein $w \in L$ mit $v = p^{r-s} w$.

Beweis. Sei $z \in L$ mit $L = \langle z \rangle$ Dann existiert ein $a \in A$ mit $v = az$; es gilt also $0 = p^s v = p^s az$. Wir erhalten $p^s a \in \operatorname{Ann}(L) = (p^r)$, also existiert ein $b \in A$ mit $p^s a = p^r b$, woraus $a = p^{r-s} b$ und schließlich $v = p^{r-s} bz$ folgt. □

Wir wenden nun das Lemma auf $L = U$, $v = x''$ und $s = r - t_j$ an. Folglich existier ein $x''' \in U$ mit $x'' = p^{l_j} x'''$.

Definiere nun $x := x' - x'''$. Dann gilt.

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \pi(x') - \pi(x'') = y - 0 \\ p^{t_j} x &= p^{t_j} x' - p^{t_j} x''' = x'' - x'' = 0 \end{aligned} \tag{*}$$

Definiere $M_j := \langle x \rangle$. Dafür gilt $\pi(M_j) = N_j$ und $\ker(\pi|_{M_j}) = \{0\}$. Denn sei $v \in M_j$ mit $\pi(v) = 0$. Es existiert ein $a \in A$ mit $v = ax$, also $0 = a\pi(x) = ay$ und damit $a \in \operatorname{Ann}(y) = \operatorname{Ann}(N_j) = (p^{t_j})$. Also existiert ein $b \in A$ mit $a = bp^{t_j}$ und somit $v = bp^{t_j} x = 0$, wobei letzteres mit Eigenschaft (*) folgt.

Folglich erhalten wir $\pi|_{M_j} \colon M_j \xrightarrow{\cong} N_j$. Wir zeigen nun $M_j \cap \sum_{j' \neq j} M_j' = \{0\}$. Sei hierzu $v \in M_j \cap \sum_{j' \neq j} M_j'$, also $\pi(v) \in N_j \cap \sum_{j' \neq j} N_{j'} = \{0\}$, also $v = 0$.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass $\sum M_j = \bigoplus M_j =: M'$ und $\pi|_{M'} \colon M' \xrightarrow{\cong} N$ (das gilt auf allen direkten Summanden). Daraus folgt $M = M' \oplus U$. Wähle nun $l = k+1$, $s_j = t_j$ (für $j = 1, \dots, k$), $s_l = r$, $M_j = N_j$ (für $j = 1, \dots, k$) und $M_l = U$. □

Zusammenfassung: Sei A ein Hauptidealring und M endlich erzeugter A-Modul. Dann gibt es ein $r \geq 0$ sowie prime $p_1, \dots, p_n \in A$, sodass für alle $1 \leq i \leq n$ Zahlen $1 \leq s_{i_1} \leq \dots \leq s_{i_{l_i}}$ mit

$$M \cong A^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{l_i} A/\left(p_i^{s_{i_j}}\right)$$

existieren.

4.4 Anwendung auf Matrizen

Sei k ein Körper, V ein k-Vektorraum, $\dim V < \infty$, $\psi \in \operatorname{End}_k(V)$ und M ein $k[t]$-Modul zu (V, ψ).

Bemerkung 4.18.

i) M ist ein Torsionsmodul (denn sonst hätte M einen torsionsfreien Anteil, der insbesondere frei über $k[t]$ und damit unendlichdimensional über k wäre).

ii) M ist zyklisch, da ein $u \in V$ mit $\langle u, \psi(u), \psi^2(u), \dots \rangle_k = V$ existiert.

Bemerkung 4.19. $\operatorname{Ann}(M) = \{p \in k[t] \mid p(\psi) = 0 \text{ in } \operatorname{End}(V)\} = (m_\psi)$, wobei m_ψ das Minimalpolynom von ψ ist.

Definition 4.20. Sei $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 \in k[t]$. Definiere $C(p) \in \mathrm{M}_{n \times n}(k)$ durch

$$C(p) = \begin{cases} (-a_0) & \text{für } n = 1, \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

$C(p)$ heißt *Begleitmatrix* zu p („companion matrix“).

Bemerkung 4.21. $\chi_{C(p)} = p$ (charakteristisches Polynom von $C(p)$ ist p).

Lemma 4.22. *Sei M ein zyklischer $k[t]$-Modul.*

i) $\dim V = \deg m_\psi$

ii) *Sei $n := \deg(m_\psi)$ und $v \in V$ mit $M = \langle v \rangle_{k[t]}$. Seien $p_0, \dots, p_{n-1} \in k[t]$ mit $\deg p_i < n$ und $p_0, \dots, p_{n-1}$ linear unabhängig über k. Dann ist $(p_0 v, \dots, p_{n-1} v)$ eine Basis von V über k.*

Beweis. Sei $m_\psi(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$.

a) Wir zeigen $\langle v, \psi(v), \dots, \psi^{n-1}(v)\rangle_k = V$. Nach Bemerkung 4.18 gilt

$$\langle v, \psi(v), \psi^2(v), \dots\rangle_k = V.$$

Da $m_\psi(\psi) = 0$, ist $\psi^n(v) \in \langle v, \psi(v), \dots, \psi^{n-1}(v)\rangle_k$ und durch Induktion ergibt sich $\psi^{n+i}(v) \in \langle v, \psi(v), \dots, \psi^{n-1}(v)\rangle_k$.

b) Wir zeigen, dass $(p_0 v, \cdots, p_{n-1}v)$ linear unabhängig ist. Seien $b_0, \dots, b_{n-1} \in k$ mit $0 = \sum b_i p_i v$. Dann ist $p := \sum b_i p_i \in \operatorname{Ann}(v) = \operatorname{Ann}(M) = (m_\psi)$.

Da $\deg p_i < \deg m_\psi$ ist, folgt $p = 0$ und, da die $p_0, \dots, p_{n-1}$ linear unabhängig sind, ist $b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0$.

Aus a) und b) folgen nun i) und ii). □

Lemma 4.23. *Sei M ein zyklischer $k[t]$-Modul.*

i) *Es gibt eine Basis B von V mit $\mathrm{M}_B(\psi) = C(m_\psi)$.*

ii) *Falls $m_\psi(t) = (t-\lambda)^n$, so existiert eine Basis B' von V mit*

$$\mathrm{M}_{B'}(\psi) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \mathrm{Jn}(\lambda)$$

Beweis. Sei $M = \langle v\rangle_{k[t]}$.

i) Definiere $v_i = \psi^i(v)$ für $i = 0, \dots, n-1$. Nach Lemma 4.22 ist $(v_0, \dots, v_{n-1})$ eine Basis von V. Dabei gilt $\psi(v_i) = v_{i+1}$ für $i = 0, \dots, n-2$ und $\psi(v_{n-1}) = \psi^n(v) = -\sum_{i=0}^{k-1} a_i \psi^i(v) = -\sum_{i=0}^{k-1} a_i v_i$, da $m_\psi(\psi) = 0$. Dabei ist $m_\psi(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$.

ii) Definiere $v_i' := (t-\lambda)^{n-i} \cdot v = (\psi - \lambda)^{n-i}(v)$ für $i = 1, \dots, n$.

Mit Lemma 4.22 folgt nun, dass $(v_1', \dots, v_n')$ eine Basis von V ist.

$$\begin{aligned} \psi(v_i') &= t \cdot v_i' = t \cdot (t-\lambda)^{n-1} \cdot v \\ &= (t-\lambda)^n v + \lambda (t-\lambda)^{n-1} v \\ &= \lambda v_i' \\ &= (t-\lambda)^{n-i+1} v + \lambda(t-\lambda)^{n-i} v = v_{i-1}' + \lambda v_i' \end{aligned}$$ □

Bemerkung. Umgekehrt gilt: Falls eine Basis B von V sowie ein normiertes $p \in k[t]$ mit $\mathrm{M}_B(\psi) = C(p)$ existiert, so ist M zyklisch.

Satz 4.24 (Rationale Normalform). *Sei V ein k-Vektorraum, $\dim V < \infty$ und $\psi \in \mathrm{End}_k(V)$. Sei $m_\psi = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$ mit $p_i \in k[t]$ irreduzibel (und normiert) mit $p_i \neq p_j$. Dann existieren $1 \leq s_{i1} \leq \cdots \leq s_{il_j} = r_i$ sowie eine Basis B von V, sodass*

$$\mathrm{M}_B(\psi) = \begin{pmatrix} C(p_1^{s_{i1}}) & & & 0 \\ & C(p_1^{s_{i2}}) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C(p_n^{s_{il_n}}) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Aus den Sätzen 4.14 und 4.17 folgt, dass es eine Zerlegung $M = \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^{l_n} M_{ij}$, wobei M_{ij} zyklisch mit $\mathrm{Ann}(M_{ij}) = (p_i^{s_{ij}})$. Da M_{ij} ein Untermodul von M ist, folgt ${}_k(M_{ij}) =: V_{ij} \subseteq V$ ist k-Untervektorraum und $\psi(V_{ij}) \subseteq V_{ij}$.

Mit Lemma 4.23 folgt daraus, dass M_{ij} zyklisch ist und dass eine Basis B_{ij} von V_{ij} mit $M_{B_{ij}}(\psi|_{V_{ij}}) = C(p_i^{s_{ij}})$ existiert. Die Basis $B = B_{11} \cup B_{12} \cup \cdots \cup B_{nl_n}$ ist nun eine geeignete Wahl. □

Korollar 4.25. *Sei $m_\psi = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$ mit normiertem und irreduziblem $p_i \in k[t]$ sowie $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$. Dann existiert ein $s_i \geq r_i$ mit $\chi_\psi = p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{s_n}$.*

Beweis. Übung. □

Korollar 4.26 (Cayley-Hamilton). $\chi_\psi(\psi) = 0$.

Satz 4.27 (Jordansche Normalform). *Sei V ein k-Vektorraum, $\dim V < \infty$ und $\psi \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind äquivalent:*

i) *m_ψ zerfällt über k.*

ii) *χ_ψ zerfällt über k.*

iii) *Es existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ und $1 \leq s_{i1} \leq \cdots \leq s_{il_i}$ und eine Basis B' von V mit*

$$\mathrm{M}_{B'}(\psi) = \begin{pmatrix} J_{s_11}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{s_12}(\lambda_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{s_nl_n}(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Beweis.

i) $\Leftrightarrow$ ii): Folgt aus Korollar 4.25.

iii) $\Rightarrow$ ii): Klar.

i) $\Rightarrow$ iii): Beweis analog zum Beweis der rationalen Normalform, statt Lemma 4.23 i) nutze Lemma 4.23 ii). □

[3. Mai 2018]

[14. Mai 2018]

5 Lokalisation

Definition 5.1. Sei A ein Ring. $S \subseteq A$ heißt *multiplikative Teilmenge*, wenn

- $1 \in S$ und
- aus $a, b \in S$ dann $a \cdot b \in S$ folgt.

Definiere auf $S \times A$ eine Äquivalenzrelation durch

$$(s, a) \sim (t, b) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists u \in S : u(ta - sb) = 0.$$

Definiere $S^{-1}A = (S \times A)/\sim$. Dies wird zu einem Ring durch (definiere $\frac{a}{s}$ als die Äquivalenzklasse von (s, a))

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

(zur Wohldefiniertheit siehe Einführung in die Algebra).

Die Abbildung $f\colon A \to S^{-1}A, a \mapsto \frac{a}{1}$ ist ein Ringhomomorphismus.

Bemerkung.

i) $f(s) \in (S^{-1}A)^\times$ für alle $s \in S$.

ii) $\frac{a}{s} = 0$ in $S^{-1}A \Leftrightarrow \exists u \in S : ua = 0$

iii) $\frac{ta}{ts} = \frac{a}{s}$ für alle $a \in A, s, t \in S$.

Satz 5.2. *Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, sei $g\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus mit $g(S) \subseteq B^\times$. Dann kommutiert das folgende Diagramm.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, dashed, "\exists! g'"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Siehe Einführung in die Algebra oder [AM04, Proposition 3.1]. □

Beispiel 5.3. Sei A ein Ring.

i) Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, so ist $S := A \setminus \mathfrak{p}$ ist multiplikative Teilmenge. Definiere $A_\mathfrak{p} := S^{-1}A$.

   Spezialfall: Für einen Integritätsbereich A gilt für $\mathfrak{p} = (0) \in \operatorname{Spec} A$ dann $A_\mathfrak{p} = \operatorname{Quot}(A)$.

ii) Für $t \in A$ ist $S := \{t^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ eine multiplikative Teilmenge. Definiere $A[t^{-1}] := S^{-1}A$ (in [AM04] heißt dies A_t).

Definition 5.4. Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge sowie M ein A-Modul. Definiere auf $S \times M$ Äquivalenzrelation durch

$$(s, x) \sim (t, y) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists u \in S : u(tx - sy) = 0.$$

Definiere damit $S^{-1}M := (S \times M)/\sim$ und bezeichne die Äquivalenzklasse von (s, x) mit $\frac{x}{s}$. Dann wird $S^{-1}M$ zu einem $S^{-1}A$-Modul via

$$\frac{c}{s} + \frac{y}{t} := \frac{tx + sy}{st}, \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{y}{t} := \frac{ay}{st}.$$

(Wohldefiniertheit und Modulaxiome gelten genauso wie für $S^{-1}A$.)

Bemerkung. Diese Konstruktion ist natürlich: Sei $f\colon M \to N$ eine A-lineare Abbildung. Wir erhalten eine Abbildung $S^{-1}f\colon S^{-1}M \to S^{-1}N$ definiert durch

$$S^{-1}f\left(\frac{x}{s}\right) := \frac{f(x)}{s}$$

$S^{-1}f$ ist wohldefiniert und $S^{-1}A$-linear.

Beweis. Wir beweisen beispielhaft die Wohldefiniertheit: Sei $\frac{x}{s} = \frac{y}{t}$ in $S^{-1}M$, es existiert also ein $u \in S$ mit $u(tx - sy) = 0$. Also gilt $0 = f(u(tx - sy)) = u(tf(x) - sf(y))$, also $\frac{f(x)}{s} = \frac{f(y)}{s}$. $\square$

Für A-lineare Abbildungen $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ gilt $S^{-1}(g \circ f) = (S^{-1}g) \circ (S^{-1}f)$.

Satz 5.5. *Seien $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ beide A-linear. Falls* $\ker g = \operatorname{im} f$ *gilt, dann ist* $\ker(S^{-1}g) = \operatorname{im}(S^{-1}f)$.

Beweis. Sei $\ker g = \operatorname{im} f$.

„$\supseteq$“: $(S^{-1}g) \circ (S^{-1}f) = S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}0 = 0$.

„$\subseteq$“: Sei $\frac{y}{t} \in \ker(S^{-1}g)$, also $0 = (S^{-1}g)\left(\frac{y}{t}\right) = \frac{g(y)}{t}$. Es gibt also ein $u \in S$ mit $ug(y) = 0$. Damit wissen wir, dass $uy \in \ker g = \operatorname{im} f$ gilt. Wir finden folglich ein $x \in M$ mit $f(x) = uy$. Betrachte $\frac{x}{ut}$. Dafür gilt $(S^{-1}f)\left(\frac{x}{ut}\right) = \frac{f(x)}{ut} = \frac{uy}{ut} = \frac{y}{t}$. $\square$

Korollar 5.6. *Sei*

$$\ldots \to M_{i-1} \to M_i \to M_{i+1} \to \ldots$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln. Dann ist auch

$$\ldots \to S^{-1}M_{i-1} \to S^{-1}M_i \to S^{-1}M_{i+1} \to \ldots$$

eine exakte Sequenz von $S^{-1}A$-Moduln.

Korollar 5.7. *Seien $M', M'' \subseteq M$ Untermoduln. Dann ist $S^{-1}M' \hookrightarrow S^{-1}M$, also können wir $S^{-1}M'$ als $S^{-1}A$-Untermodul von $S^{-1}M$ auffassen.*

i) $S^{-1}(M' + M'') = S^{-1}M' + S^{-1}M''$

ii) $S^{-1}(M' \cap M'') = S^{-1}M' \cap S^{-1}M''$

iii) $S^{-1}({}^{M}/_{M'}) \cong {}^{S^{-1}M}/_{S^{-1}M'}$

Beweis. Übung. (Nutze maßgeblich die Exaktheit.) $\square$

Proposition 5.8. *Sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge und M ein A-Modul. Dann gibt es genau einen Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln*

$$\begin{aligned} \varphi\colon S^{-1}A \otimes_A M &\longrightarrow S^{-1}M \\ \frac{a}{s} \otimes x &\longmapsto \frac{ax}{s}. \end{aligned}$$

Beweis. Die Abbildung

$$S^{-1}A \times M \to S^{-1}M, \left(\frac{a}{s}, x\right) \mapsto \frac{ax}{s}$$

ist wohldefiniert und A-bilinear. Also erhalten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} S^{-1}A \times M \arrow[r] \arrow[d] & S^{-1}M \\ S^{-1}A \otimes_A M \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi\ A\text{-linear}"'] & \end{tikzcd}$$

Wir rechnen nach, dass φ auch $S^{-1}A$-linear ist. Sei dazu $\frac{b}{t} \in S^{-1}M$ und $z \in S^{-1}A \otimes_A M$. Dann gilt $z = \sum \frac{a_i}{s_i} \otimes x_i$ für $a_i \in A, s_i \in S, x_i \in M$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{b}{t}z\right) &= \varphi\left(\sum \frac{ba_i}{ts_i} \otimes x_i\right) = \sum \varphi(\frac{ba_i}{ts_i} \otimes x_i) = \sum \frac{ba_ix_i}{ts_i} = \frac{b}{t} \cdot \sum \frac{a_ix_i}{s_i} \\ &= \frac{b}{t} \cdot \varphi\left(\sum \frac{a_i}{s_i} \otimes x_i\right). \end{aligned}$$

Damit ist φ tatsächlich $S^{-1}A$-linear.

Es bleibt zu zeigen, dass φ ein Isomorphismus ist. Die Surjektivität ist klar. Für die Injektivität zeigen wir zunächst, dass für alle $z \in S^{-1}A \otimes_A M$ dann $x \in M, s \in S$ mit $z = \frac{1}{s} \otimes x$ existieren. Denn seien $a_i \in A, s_i \in S, x_i \in M$ mit $z = \sum \frac{a_i}{s_i} \otimes x_i$, so definieren wir $s = \prod_i s_i, t_i = \prod_{j \neq i} s_j$, woraus

$$z = \sum \frac{a_it_i}{s} \otimes x_i = \sum \frac{1}{s} \otimes a_it_ix_i = \frac{1}{s} \otimes \sum a_it_ix_i$$

folgt. Sei nun $z \in S^{-1}A \otimes_A M$ mit $\varphi(z) = 0$. Wähle s, x mit $z = \frac{1}{s} \otimes x$. Also gilt $0 = \frac{x}{s}$, und es exisiert somit ein $u \in S$ mit $ux = 0$. Damit gilt auch $0 = \frac{1}{su} \otimes ux = \frac{u}{su} \otimes x = \frac{1}{s} \otimes x = z$. $\square$

Korollar 5.9. *$S^{-1}A$ ist flach als A-Modul.*

Beweis. Dies folgt aus Proposition 5.8 und Korollar 5.6. □

Satz 5.10. *Seien M, N zwei A-Moduln sowie $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Dann existiert genau ein Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln*

$$\begin{aligned} \varphi\colon S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N &\longrightarrow S^{-1}(M \otimes_A N) \\ \frac{x}{s} \otimes \frac{y}{t} &\longmapsto \frac{x \otimes y}{st}. \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N &\cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A \otimes_A N) && \text{(Proposition 5.8)} \\ &\cong S^{-1}M \otimes_A N && \text{(Lemma 3.11)} \\ &\cong S^{-1}A \otimes_A M \otimes_A N \\ &\cong S^{-1}(M \otimes_A N). \end{aligned}$$

Verfolgen der Bilder von $\frac{x}{s} \otimes \frac{y}{t}$ unter Komposition liefert tatsächlich $\varphi\left(\frac{x}{s} \otimes \frac{y}{t}\right) = \frac{x \otimes y}{st}$. □

5.1 Lokal-Global-Prinzipien

Satz 5.11. *Sei M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) $M = 0$

ii) *Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ gilt $M_\mathfrak{p} = 0$.*

iii) *Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ gilt $M_\mathfrak{m} = 0$.*

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii): Klar.

ii) $\Rightarrow$ iii): Klar.

iii) $\Rightarrow$ i): Angenommen, $M \neq 0$. Sei $x \in M \setminus \{0\}$. Dann ist $\operatorname{Ann}(x) \neq (1)$, es existiert also ein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ mit $\operatorname{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{m}$. Aus iii) folgt dann, dass $M_\mathfrak{m} = 0$ ist, also $\frac{x}{1} = 0$ in $M_\mathfrak{m}$; folglich gibt es ein $n \in A \setminus \mathfrak{m}$ mit $nx = 0$ Dann folgt aber $n \in \operatorname{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{m}$, was ein Widerspruch ist. □

Satz 5.12. *Sei $f\colon M \to N$ eine A-lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

i) *f ist injektiv respektive surjektiv.*

ii) *Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ gilt $f_\mathfrak{p}\colon M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ ist injektiv respektive surjektiv.*

iii) *Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ gilt: $f_\mathfrak{m}\colon M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ ist injektiv respektive surjektiv.*

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii): Folgt aus Exaktheit (Korollar 5.6).

ii) $\Rightarrow$ iii): Klar.

iii) $\Rightarrow$ i): Betrachte die folgende exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0$$

von A-Moduln. Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Dann ist

$$0 \longrightarrow (\ker f)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} N_{\mathfrak{m}} \longrightarrow (\operatorname{coker} f)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

exakt nach Korollar 5.6. Also ist $\ker(f_{\mathfrak{m}}) \cong (\ker f)_{\mathfrak{m}}$, und genauso folgt $\operatorname{coker}(f_{\mathfrak{m}}) \cong (\operatorname{coker} f)_{\mathfrak{m}}$.

Da $f_{\mathfrak{m}}$ injektiv ist, ist $\ker(f_{\mathfrak{m}}) = 0$. Das impliziert, dass für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ gilt: $(\ker f)_{\mathfrak{m}} = 0$, und mit Satz 5.11 folgt $\ker f = 0$, also ist f injektiv.

Der Beweis für Surjektivität verläuft analog. □

Satz 5.13. *Sei M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) *M ist ein flacher A-Modul.*

ii) *Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ist $M_{\mathfrak{p}}$ flacher $A_{\mathfrak{p}}$-Modul*

iii) *Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ist $M_{\mathfrak{p}}$ flacher A-Modul*

iv) *Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ ist $M_{\mathfrak{m}}$ flacher $A_{\mathfrak{m}}$-Modul*

v) *Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ ist $M_{\mathfrak{m}}$ flacher A-Modul.*

Beweis. Übungsblatt 6. □

5.2 Idealkorrespondenz

Erinnerung: Für einen Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$ gilt:

- $J \subseteq B$ Ideal: $J \cap A = f^{-1}(J) \subseteq A$ Ideal
  $J \in \operatorname{Spec} B \Rightarrow J \cap A \in \operatorname{Spec} A$
- $I \subseteq A$ Ideal: $I \cdot B := (f(I)) \subseteq B$ Ideal
- $I \subseteq (I \cdot B) \cap A$, $J \supseteq (J \cap A) \cdot B$

Satz 5.14. *Sei A ein Ring und $S \subseteq A$ multiplikative Teilmenge.*

i) *Sei $I \subseteq A$ ein Ideal. Dann gilt $I \cdot S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a \in I, s \in S \right\}$ und $(I \cdot S^{-1}A) \cap A = \{a \in A \mid \exists n \in S : na \in I\}$.*
Insbesondere gilt $I \cdot S^{-1}A = (1) \Leftrightarrow I \cap S \neq \emptyset$.

ii) *Ist* $J \subseteq S^{-1}A$ *ein Ideal, so folgt* $(J \cap A) \cdot S^{-1}A = J$.

iii) *Falls* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ *mit* $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, *so gilt* $\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A \in \operatorname{Spec}(S^{-1}A)$ *und* $(\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A) \cap A = \mathfrak{p}$.

iv) *Die Abbildungen*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Spec}(S^{-1}A) & \xleftrightarrow{1:1} & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \\ \mathfrak{q} & \longmapsto & \mathfrak{q} \cap A \\ \mathfrak{p} \cdot S^{-1}A & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{p} \end{array}$$

sind wohldefiniert und zueinander inverse Bijektionen sowie inklusionserhaltend (für $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ *gilt also* $\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A \subseteq \mathfrak{p}' \cdot S^{-1}A$ *und für* $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ *gilt* $\mathfrak{q} \cap A \subseteq \mathfrak{q}' \cap A$*).*

[14. Mai 2018]

[17. Mai 2018]

Beweis.

i) Wir zeigen zunächst $I \cdot S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a \in I, s \in S \right\}$.

„$\supseteq$“: Sei $a \in I, s \in S$. Dann ist $\frac{a}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{a}{1} \in I \cdot S^{-1}A$, denn für $f\colon A \to S^{-1}A$ ist $\frac{a}{1} = f(a) \in f(I)$.

„$\subseteq$“: Sei $x \in I \cdot S^{-1}A$. Somit existieren $a_i \in I, b_i \in A, s_i \in S_i$ mit $x = \sum \frac{b_i}{s_i} \cdot \frac{a_i}{1}$. Definiere nun $s := \prod s_i$ sowie $a := \sum_i b_i \prod_{j \neq i} s_j a_i \in I$. Damit ist $x = \frac{a}{s}$.

Wir zeigen nun noch, dass $(I \cdot S^{-1}A) \cap A = \{a \in A \mid \exists n \in S : na \in I\}$. Sei $a \in A$.

$$\begin{aligned} a \in (I \cdot S^{-1}A) \cap A \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a}{1} \in I \cdot S^{-1}A \\ &\Leftrightarrow \quad \exists b \in I, t \in S : \frac{a}{1} = \frac{b}{t} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists b \in I, t \in S : \exists s \in S : s(ta - b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists u \in S : ua \in I \end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Äquivalenz, denn:

„$\Rightarrow$“: $sta = sb \in I \Rightarrow u := st$

„$\Leftarrow$“: $t := u, s = 1, b = ua$

ii) Es genügt, $J \subseteq (J \cap A) \cdot S^{-1}A$ zu zeigen, da die andere Inklusion trivial gilt. Sei also $x = \frac{a}{s} \in J$. Damit haben wir $\frac{a}{1} = \frac{s}{1} \cdot \frac{a}{s} \in J$. Folglich ist $a \in J \cap A$; das bedeutet aber nach i), dass $\frac{a}{s} \in (J \cap a) \cdot S^{-1}A$ gilt.

iii) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Seien $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}A \setminus (\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A)$. Wir zeigen, dass dann auch $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \notin \mathfrak{p} \cdot S^{-1}A$ folgt. Es gilt $a, b \notin \mathfrak{p}$ nach i). Folglich haben wir $ab \notin \mathfrak{p}$. Angenommen $\frac{ab}{st} \in \mathfrak{p} \cdot S^{-1}A$, so existieren $c \in \mathfrak{p}, u \in S$ mit $\frac{ab}{st} = \frac{c}{u}$. Das bedeutet widerum, dass es ein $v \in S$ gibt, sodass $v(uab - stc) = 0$, also $vuab = vstc \in \mathfrak{p}$.

Da $ab \notin \mathfrak{p}$, muss $vu \in \mathfrak{p}$ gelten. Es gilt aber $vu \in S$ und $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch.

Es verbleibt, $(\mathfrak{p} \cdot S^{-1}A) \cap A = \mathfrak{p}$ zu zeigen. Wegen i) gilt $(p \cdot S^{-1}A) \cap A = \{a \in A \mid \exists u \in S : na \in \mathfrak{p}\} = \mathfrak{p}$, da $na \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow a \in \mathfrak{p}$.

iv) Nichts zu zeigen. □

Beispiel 5.15.

i) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Dann gibt es eine Bijektion

$$\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}} \xleftrightarrow{1:1} \{\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p}' \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset\} = \{\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Damit folgt, dass $A_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring mit dem maximalem Ideal $\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}$ ist.

ii) Sei $t \in A$. Dann erhalten wir die Bijektion

$$\operatorname{Spec} A[t^{-1}] \xleftrightarrow{1:1} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \cap \{t^0, t^1, \dots\} = \emptyset\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \not\ni t\}.$$

5.3 Lokalisation von Algebren

Bemerkung 5.16. Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus sowie sei $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge.

i) Da $S^{-1}B = S^{-1}({}_A B) \cong S^{-1}A \otimes_A B$ nach Proposition 5.8 gilt, ist $S^{-1}B$ ein Ring und sogar eine $S^{-1}A$-Algebra.

ii) $f(S) \subseteq B$ ist eine multiplikative Teilmenge.

iii) Sei $s \in S$ und betrachte $f(s)$. Sei $g\colon B \to S^{-1}B$. Dann ist $g(f(s)) = \frac{f(s)}{1} \in (S^{-1}B)^{\times}$, da $\frac{f(s)}{1} \cdot \frac{1}{s} = 1$ in $S^{-1}B$, da dies genau dann der Fall ist, wenn ein $u \in S$ mit $u(f(s) - s \cdot 1_B) = 0$ existiert. Letzteres gilt aber, denn $s \cdot 1_B = f(s) \cdot 1_B$.

Also gilt $g(f(s)) \subseteq (S^{-1}B)^{\times}$. Damit kommutiert folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & S^{-1}B \\ f(S)^{-1}B \arrow[ur, dashed, "\exists! \varphi \text{ Ringhom.}"'] & \end{tikzcd}$$

Für $x = \frac{b}{f(s)} \in f(S)^{-1}B$ folgt $\varphi\left(\frac{b}{f(s)}\right) = \frac{b}{s}$. $f(S)^{-1}B$ ist eine $S^{-1}A$-Algebra via

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ S^{-1}A \arrow[r] & f(S)^{-1}B. \end{tikzcd}$$

Man rechnet schnell nach, dass φ Homomorphismus von $S^{-1}A$-Algebren ist.

iv) φ ist Isomorphismus von $S^{-1}A$-Algebren.

Beweis. Die Surjektivität ist klar nach der Definition von φ. Weiterhin ist φ injektiv, denn sei $x = \frac{b}{f(s)} \in f(S)^{-1}B$ mit $\varphi(x) = 0$. Dann erhalten wir $0 = \frac{b}{s}$; es existiert also ein $u \in S$ mit $0 = ub = f(u) \cdot b$, woraus $\frac{b}{f(s)} = 0$ folgt. $\square$

Korollar 5.17. *Sei $I \subsetneq A$ ein Ideal und $S \subsetneq A$ eine multiplikative Teilmenge mit $I \cap S = \emptyset$. Sei $\pi\colon A \to A/I$. Dann existiert ein Isomorphismus*

$$S^{-1}A/I \cdot S^{-1}A \xrightarrow{\cong} \pi(S)^{-1}(A/I)$$

von A-Algebren.

Beweis. Es gilt

$$\pi(S)^{-1}(A/I) \cong S^{-1}(A/I) \cong S^{-1}A \otimes_A (A/I) \cong S^{-1}A/IS^{-1}A,$$

wobei der letzte Isomorphismus sogar ein Isomorphismus von A-Algebren ist. $\square$

Korollar 5.18. *Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Dann gilt*

$$A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p} \cong \pi(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}(A/\mathfrak{p}) = \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p}) =: \kappa(\mathfrak{p}).$$

Korollar 5.19. *Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Dann erhalten wir die folgende Bijektion:*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Spec} S^{-1}B & \xleftrightarrow{1:1} & \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid (\mathfrak{q} \cap A) \cap S = \emptyset\} \\ \mathfrak{q}' & \longmapsto & \mathfrak{q}' \cap B \\ \mathfrak{q}S^{-1}B & \longleftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} S^{-1}B & \xleftrightarrow{1:1} & \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{q} \cap f(S) = \emptyset\}, \\ \| & & \| \\ \operatorname{Spec} f(S)^{-1}B & & \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid (\mathfrak{q} \cap A) \cap S = \emptyset\} \end{array}$$

denn $\mathfrak{q} \cap f(S) = \emptyset \Leftrightarrow f^{-1}(\mathfrak{q}) \cap S = \emptyset$. $\square$

Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Betrachte $f^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, $f^*(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} \cap A$. Wir können mit den Resultaten von eben die Faser $(f^*)^{-1}(\{\mathfrak{p}\})$ beschreiben.

Korollar 5.20. *Sei $f\colon A \to B$, sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Dann gilt*

$$\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}\} \xleftrightarrow{1:1} \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})).$$

Beweis. Es gilt

$$\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) = \operatorname{Spec}(B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})) = \operatorname{Spec}((B \otimes_A A_\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}))$$

nach Korollar 5.18 und Proposition 3.12. Wegen $B \otimes_A A_\mathfrak{p} = (A \setminus \mathfrak{p})^{-1} B = B_\mathfrak{p}$ erhalten wir also

$$\operatorname{Spec}((B \otimes_A A_\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} ({}^{A_\mathfrak{p}}/_{\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}})) = \operatorname{Spec}(B_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} ({}^{A_\mathfrak{p}}/_{\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}})) = \operatorname{Spec}({}^{B_\mathfrak{p}}/_{(\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}) \cdot B_\mathfrak{p}})$$

Dabei ist $(\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}) \cdot B_\mathfrak{p} = \mathfrak{p} B_\mathfrak{p}$, folglich haben wir eine Bijektion

$$\{\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} B_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q}' \supseteq \mathfrak{p} B_\mathfrak{p}\} \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{q} \cap A \supseteq \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \cap A \subseteq \mathfrak{p}\},$$

da, unter Beachtung der Bijektion $\operatorname{Spec} B_\mathfrak{p} \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \{q \in \operatorname{Spec} B \mid (q \cap A) \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset\}, \mathfrak{q}' \mapsto \mathfrak{q}' \cap B$ aus Korollar 5.19, für $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} B_\mathfrak{p}$ dann $\mathfrak{q}' \supseteq \mathfrak{p} B_\mathfrak{p}$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{q}' \cap B \supseteq \mathfrak{p} B$, also genau dann, wenn $\mathfrak{q}' \cap A \supseteq \mathfrak{p}$.

Damit erhalten wir

$$\operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})) \xleftrightarrow{1:1} \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}\}. \qquad \square$$

6 Ganze Ringerweiterungen

Sei B eine A-Algebra.

Definition 6.1.

i) Sei $b \in B$. b heißt *ganz* („integral“) über A, wenn ein normiertes („monic“) $p(t) \in A[t]$ mit $p(b) = 0$ existiert.

ii) Die Menge $\{b \in B \mid b \text{ ganz über } A\}$ heißt *ganzer Abschluss* („integral closure“) von A in B.

iii) B heißt *ganz* über A, wenn jedes $b \in B$ ganz über A ist.

iv) A heißt *ganz abgeschlossen* in B, wenn $b \in B$ genau dann ganz ist, wenn b in $\operatorname{im}(A \to B)$ liegt.

v) Ein Ringhomomorphismus $f : A \to B$ heißt *ganz*, wenn B ganz über $f(A)$ ist.

Beispiel 6.2. Sei $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$. Sei $x = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ ganz über $\mathbb{Z}$ und sei $(r, s) = (1)$. Dann existiert $p(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$ mit

$$\begin{aligned} & 0 = p(x) = \frac{r^n}{s^n} + a_{n-1} \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \cdots + a_0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_0 s^n. \end{aligned}$$

Folglich gilt $s \mid r^n$; damit folgt $s \in \mathbb{Z}^\times$ und $x \in \mathbb{Z}$.

Bezeichnungen. Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

i) Seien $b_1, \ldots, b_n \in B$. Definiere $A[b_1, \ldots, b_n]$ als die kleinste A-Unteralgebra, die $b_1, \ldots, b_n$ enthält; also $A[b_1, \ldots, b_n] = \operatorname{im} \operatorname{ev}_{(b_1, \ldots, b_n)} \colon A[t_1, \ldots, t_n] \to B$.

ii) $A \to B$ heißt *endlich* genau dann, wenn ${}_AB$ ein endlich erzeugter A-Modul ist.

Lemma 6.3. *Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus sowie $b \in B$. Dann sind äquivalent:*

i) *b ist ganz über A.*

ii) *$A[b]$ ist endlich über A.*

iii) *Es gibt eine endliche A-Unteralgebra $C \subseteq B$ mit $b \in C$.*

[17. Mai 2018]

[28. Mai 2018]

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii): Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ mit $b^n = -(a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_0)$. Sei $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$. Per Definition gilt $A[b] = \{q(b) \mid q \in A[t]\}$. Sei also nun $q \in A[t]$. Es existieren folglich $c, r \in A[t]$ mit $q = c \cdot p + r$ und $\deg r < \deg p$. Also ist $A[b] = \{r(b) \mid r \in A[t], \deg r < n\} = \langle 1, b, b^2, \dots, b^{n-1}\rangle_A$.

ii) $\Rightarrow$ iii): Klar.

iii) $\Rightarrow$ i): Sei $C = \langle b_1, \dots, b_n\rangle_A$. Betrachte die A-lineare Abbildung $C \to C, c \mapsto bc$. Wähle $a_{ij} \in A$ mit

$$b \cdot b_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i.$$

Betrachte $M = (b \cdot \delta_{ij} - a_{ij})$. Dann ist $M \cdot (b_1, \dots, b_n)^T = 0$. Wir multiplizieren mit der adjunkten Matrix zu M und erhalten

$$M^{\mathrm{ad}} M \cdot (b_1, \dots, b_n)^T = \det M \cdot E_n \cdot (b_1, \dots, b_n)^T = 0.$$

Wir erhalten also $(\det M)b_j = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$; insbesondere $(\det M)c = 0$ für alle $c \in C$. Es gilt folglich $\det M = 0$.

Definiere nun $p(t) := \chi_{(a_{ij})}(t) = \det(t \cdot \delta_{ij} - a_{ij})$. Dann ist $p(t) \in A[t]$ normiert und $p(b) = 0$. Folglich ist b ganz über A. □

Lemma 6.4. *Seien $A \to B \to C$ Ringhomomorphismen.*

i) *Ist B eine endliche A-Algebra und C eine endliche B-Algebra, so ist C eine endliche A-Algebra.*

ii) *Ist B ganz über A und C ganz über B, so ist C ganz über A.*

Beweis.

i) Folgt sofort aus Lemma 3.7.

ii) Sei $c \in C$. Da c ganz über B ist, existieren $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ mit $c^n + b_{n-1}c^{n-1} + \cdots + b_0 = 0$. Da die $b_0, \ldots, b_{n-1}$ ganz über A sind, ist $A[b_1, \ldots, b_{n-1}]$ endlich über A, da die b_i ganz über $A[b_0, \ldots, b_{n-1}]$ sind und dies dann mit i) induktiv folgt.

Dann ist c ganz über $A[b_1, \ldots, b_{n-1}]$. Also ist $A[b_0, \ldots, b_{n-1}, c] \subseteq C$ endlich über A und enthält c. Nach Lemma 6.3 ist c ganz über A. □

Korollar 6.5. *Sei $A \to B$ eine Ringhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*

i) *B ist eine endliche A-Algebra.*

ii) *Es existieren $b_1, \ldots, b_n \in B$, welche ganz über A sind, mit $B = A[b_1, \ldots, b_n]$.*

iii) *B ist endlich erzeugt und ganz über A.*

Beweis.

iii) $\Rightarrow$ ii): Klar.

ii) $\Rightarrow$ i): Siehe Lemma 6.3 und Lemma 6.4.

i) $\Rightarrow$ iii): Endliche Algebren sind insbesondere endlich erzeugt und außerdem ganz nach Lemma 6.3. □

Korollar 6.6. *Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\overline{A}$ der ganze Abschluss von A in B. Dann ist $\overline{A}$ eine Unteralgebra von B.*

Beweis. Seien $b, b' \in B$ ganz über A. Es ist zu zeigen, dass $b + b'$ und $b \cdot b'$ ganz über A sind. Es gilt aber $b + b', b \cdot b' \in A[b, b']$, wobei letzteres ganz ist. □

6.1 Going up

Lemma 6.7. *Sei $A \hookrightarrow B$ eine ganze Ringerweiterung (also ein injektiver Ringhomomorphismus) sowie A und B Integritätsbereiche. Dann gilt:*

$$B \text{ Körper} \Longleftrightarrow A \text{ Körper}.$$

Beweis. Sei ohne Einschränkung $A \subseteq B$.

„$\Rightarrow$“: Sei $a \in A \setminus \{0\}$. Dann ist $a \in B \setminus \{0\} = B^\times$. Also gibt es ein $b \in B$ mit $ab = 1$. Da b ganz über A ist, gibt es $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, sodass $b^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i$ gilt. Also folgt

$$b = a^{n-1}b^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a^{n-1} b^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a^{n-1-i} \in A.$$

Folglich gilt $b \in A$ und damit $a \in A^\times$.

„$\Leftarrow$“: Sei $b \in B \setminus \{0\}$. Es gibt also $p(t) \in A[t]$ normiert mit $p(b) = 0$. Schreibe

$$p(t) = t \cdot q(t) + a$$

mit $q(t) \in A[t]$, $a \in A$. Insbesondere ist $q \neq 0$. Wähle p von minimalem Grad. Dann folgt $\deg q < \deg p$, also $q(b) \neq 0$. Das bedeutet $0 = bq(b) + a$, wenn wir in obige Gleichung b einsetzen, also $b \cdot q(b) = -a$, wobei $b \cdot q(b) \neq 0$, da B ein Integritätsbereich ist. Andererseits ist $b \cdot q(b) \in A$ und damit $b \cdot q(b) \in A^\times \subseteq B^\times$, also $b \in B^\times$. $\square$

Für einen Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$ erhalten wir eine Abbildung

$$f^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A, \quad \mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap A.$$

Proposition 6.8. *Sei $f\colon A \to B$ ganz.*

i) *Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$. Dann gilt $\mathfrak{q} \in \operatorname{Max} B \Leftrightarrow \mathfrak{q} \cap A \in \operatorname{Max} A$.*

ii) *Sei f injektiv. Dann existiert ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.*

iii) *Seien $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ und $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$. Dann folgt bereits $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.*

Beweis.

i) Betrachte $A \to B$. Dann erhalten wir vermöge des folgenden Diagramms $A/_{\mathfrak{q} \cap A} \hookrightarrow B/_{\mathfrak{q}}$ ganz.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f \text{ ganz}"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\text{ganz}"'] \\ A/_{\mathfrak{q}\cap A} \arrow[r, hook] & B/_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

Mit Lemma 6.7 folgt die Behauptung.

ii) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Betrachte $A \hookrightarrow B$. Dann ist $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ ganz. Also kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_\mathfrak{p} \arrow[r] & B_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

Wir beweisen zunächst das folgende

Lemma. Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus, $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge. Falls $A \to B$ ganz ist, dann ist $S^{-1}A \to S^{-1}B$ ganz.

Beweis. Sei $\frac{b}{s} \in S^{-1}B$. Dann ist b ganz über A, es gibt also $a_0, \dots, a_{n-1}$ mit $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ Nun folgt $0 = \frac{b^n}{s^n} + \frac{a_{n-1}}{s} \cdot \frac{b^{n-1}}{s^{n-1}} + \cdots + \frac{a_0}{s^n}$, also ist $\frac{b}{s}$ ganz über $S^{-1}A$. $\square$

Es gilt $B_\mathfrak{p} \neq 0$, denn $B_\mathfrak{p} \cong f(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}B$ und $f(A \setminus \mathfrak{p}) \not\ni 0$ (da f injektiv). Da $B_\mathfrak{p} \neq 0$ ist, gibt es $n \in \operatorname{Max} B_\mathfrak{p}$. Nach i) ist $n \cap A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(A_\mathfrak{p})$, da wir eine ganze Ringerweiterung haben.

Da $A_\mathfrak{p}$ lokaler Ring ist, ist $n \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}$. Definiere $\mathfrak{q} = n \cap B$. Also haben wir

$$\mathfrak{q} \cap A = (n \cap B) \cap A = (n \cap A_\mathfrak{p}) \cap A = (\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}) \cap A = \mathfrak{p},$$

wobei die letzte Gleichheit aus Satz 5.14 folgt.

iii) Sei $\mathfrak{p} := \mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{q}_2 \cap A$. Betrachte

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f \text{ ganz}} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_\mathfrak{p} & \xrightarrow{\text{ganz}} & B_\mathfrak{p}. \end{array}$$

Definiere $\mathfrak{q}_i' := \mathfrak{q}_i \cdot B_\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B_\mathfrak{p}$ für $i = 1, 2$ (denn $\mathfrak{q}_i \cap f(A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$). Es gilt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{q}_i' \cap A_\mathfrak{p}) \cap A &= (\mathfrak{q}_i' \cap B) \cap A \\ &= ((\mathfrak{q}_i \cdot B_\mathfrak{p}) \cap B) \cap A \\ &= \mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Also erhalten wir $\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p} = ((\mathfrak{q}_i' \cap A_\mathfrak{p}) \cap A) \cdot A_\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_i' \cap A_\mathfrak{p}$ nach Primidealkorrespondenz (Satz 5.14). Dabei ist $\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(A_\mathfrak{p})$. Mit i) können wir folglich $\mathfrak{q}_1' \cdot \mathfrak{q}_2' \in \operatorname{Max}(B_\mathfrak{p})$ folgern. Da $\mathfrak{q}_1' \subseteq \mathfrak{q}_2'$ ist, muss damit bereits $\mathfrak{q}_1' = \mathfrak{q}_2'$ gelten.

Wieder mit Satz 5.14 können wir schließlich

$$\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{q}_1 \cdot B_\mathfrak{p}) \cap B = \mathfrak{q}_1' \cap B = \mathfrak{q}_2' \cap B = \mathfrak{q}_2$$

schreiben. □

Satz 6.9 (Going up). *Sei $A \to B$ ganz. Seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$. Dann existiert ein $\mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$.*

Merkbild:

$$\begin{array}{ccccc} B & & \mathfrak{q}_1 & \subseteq & \exists \mathfrak{q}_2 \\ \uparrow{\scriptstyle \text{ganz}} & & \downarrow & & \downarrow \\ A & & \mathfrak{p}_1 & \subseteq & \mathfrak{p}_2 \end{array}$$

Beweis. Betrachte

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{ganz}} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ A/\mathfrak{p}_1 & \xrightarrow{\text{ganz}} & B/\mathfrak{q}_1. \end{array}$$

Es existiert $\mathfrak{q}_2' \in \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{q}_1)$ mit $\mathfrak{q}_2' \cap (A/\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1$.

Definiere $\mathfrak{q}_2 := \pi^{-1}(\mathfrak{q}_2') = \mathfrak{q}_2' \cap B$. Dann gilt $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ und

$$\mathfrak{q}_2 \cap A = \tilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{q}_2' \cap A/\mathfrak{p}_1) = \tilde{\pi}^{-1}(\mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2.$$

□

6.2 Going down

Definition 6.10. Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $I \subseteq A$ Ideal. Sei $b \in B$. b heißt *ganz über* I, wenn es ein normiertes Polynom $p(t)$ mit

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 \in A[t]$$

gibt, sodass $p(b) = 0$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in I$.

Lemma 6.11. *Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Sei C der ganze Abschluss von A in B. Sei $I \subseteq A$ ein Ideal sowie $b \in B$. Äquivalent sind dann:*

i) *b ist ganz über I.*

ii) $b \in \sqrt{I \cdot C}$

[28. Mai 2018]

[4. Juni 2018]

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii): Sei $b^n = a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in I$. Da b ganz über I ist, ist b insbesondere ganz über A. Folglich gilt $b \in C$ und damit auch $b^0, \ldots, b^{n-1} \in C$. Also ist $b^n \in I \cdot C$ und $b \in \sqrt{I \cdot C}$.

ii) $\Rightarrow$ i): Sei $b \in \sqrt{I \cdot C}$. Nach Definition gibt es ein $n > 0$, sodass $b^n \in I \cdot C$. Das bedeutet, es existieren $a_1, \ldots, a_r \in I$, $c_1, \ldots, c_r \in C$ mit $b^n = a_1c_1 + \cdots + a_rc_r$. Da $c_1, \ldots, c_r$ ganz über A sind, ist $A[c_1, \ldots, c_r] = C'$ als A-Modul endlich erzeugt (Korollar 6.5).

Sei $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle_A = C'$. Betrachte die folgende A-lineare Abbildung

$$\varphi\colon C' \longrightarrow C', c' \mapsto b^n \cdot c'.$$

Es gilt $\operatorname{im}\varphi \subseteq I \cdot C'$. Also gibt es $a_{ij} \in I$ mit

$$b^n \cdot b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_i.$$

Definiere $p(t) = \chi_{(a_{ij})} = \det(t\delta_{ij} - a_{ij})$ (normiert). Es gilt (vgl. Beweis von Lemma 6.3) $p(b^n) = 0$. Außerdem ist $p(t) - t^n \in I[t]$. Damit ist b^n aber ganz über I, also ist auch schon b ganz über I. $\square$

Definition 6.12. Sei A ein Integritätsbereich. A heißt *normal* genau dann, wenn A ganz abgeschlossen in $\operatorname{Quot}(A)$ ist.

Lemma 6.13. *Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung, A und B Integritätsbereiche, A normal und $I \subseteq A$ ein Ideal. Sei $b \in B$ ganz über I. Sei*

$$m_b(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[t]$$

das Minimalpolynom von b über $K := \operatorname{Quot}(A)$. Dann gilt $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \sqrt{I}$.

Beweis. Sei L/K eine Erweiterung von K, sodass $y_1, \ldots, y_n \in L$ mit $m_b(t) = (t - y_1) \ldots (t - y_n)$ existieren. Sei $f \in A[t]$ normiert mit $f(t) - t^{\deg(f)} \in I[t]$, sodass $f(b) = 0$. Dann ist f ein Vielfaches von $m_b = m_{y_i}$. Also $f(y_i = 0)$ und damit sind $y_1, \ldots, y_n$ ganz über I.

Sei C der ganze Abschluss von A in B. Nach Lemma 6.11 ist $y_i \in \sqrt{I \cdot C}$. Sodann folgt

$$a_{n-k} = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} y_{i_1} \ldots y_{i_k} \in \sqrt{I \cdot C}$$

für $k = 1, \ldots, n$. Nach Lemma 6.11 sind damit auch $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ganz über I. Insbesondere sind $a_0, \ldots, a_{n-1}$ ganz über A. Da A normal ist, folgt bereits $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$. Wende nun Lemma 6.11 mit $B = K$ an und erhalte $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \sqrt{I}$. □

Satz 6.14 (Going down)**.** *Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung. A und B seien dabei Integritätsbereiche sowie A normal.*

Seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ und sei $\mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$. Dann gibt es $\mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$.

Merkbild:

$$\begin{tikzcd}
B & \exists \mathfrak{q}_1 \arrow[d, dash] & \subseteq & \mathfrak{q}_2 \arrow[d, dash] \\
A \arrow[u, "\text{ganz}"'] & \mathfrak{p}_1 & \subseteq & \mathfrak{p}_2
\end{tikzcd}$$

Beweis. Es genügt,

$$(\mathfrak{p}_1 \cdot B_{\mathfrak{q}_2}) \cap A = \mathfrak{p}_1 \tag{*}$$

zu zeigen, da daraus nach einer Übung ein $\mathfrak{q}_1' \in \operatorname{Spec} B_{\mathfrak{q}_2}$ mit $\mathfrak{q}_1' \cap A = \mathfrak{p}_1$ existiert und wir dann $\mathfrak{q}_1 := \mathfrak{q}_1' \cap B \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{q}_1 \cap A = (\mathfrak{q}_1' \cap B) \cap A = \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ definieren können.

Wir zeigen nun also (*).

„$\supseteq$“: Klar.

„$\subseteq$“: Sei $x \in (\mathfrak{p}_1 \cdot B_{\mathfrak{q}_2}) \cap A$. Angenommen, $x \notin \mathfrak{p}_1$. Da $x \in \mathfrak{p}_1 \cdot B_{\mathfrak{q}_2} = (\mathfrak{p}_1 \cdot B) \cdot B_{\mathfrak{q}_2}$, gibt es $y \in \mathfrak{p}_1 \cdot B$, $s \in B \setminus \mathfrak{q}_2$ mit $x = \frac{y}{s}$. Mit Lemma 6.11 (setze $C = B$) ist y ganz über $\mathfrak{p}_1$. Sei $K := \operatorname{Quot}(A)$. Betrachte das Minimalpolynom $m_y(t) \in K[t]$ von y über K. Wir schreiben

$$m_y(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Dann folgt mit Lemma 6.13, dass $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \sqrt{\mathfrak{p}_1} = \mathfrak{p}_1$.

Da $x = \frac{y}{s} \in A \setminus \{0\}$, ist $s = \frac{y}{x}$ (in Quot(B)) und $\frac{1}{x} \in K$. Damit ist

$$m_s(t) = t^n + \frac{a_{n-1}}{x} t^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}$$

das Minimalpolynom von s über K. Definiere $\tilde{a}_i := \frac{1}{x^{n-i}} a_i$. Es gilt $s \in B \setminus \mathfrak{q}_2 \subseteq B$, also ist s ganz über A; also folgt mit Lemma 6.13 (mit $I = A$), dass $\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_{n-1} \in A$.

Nach Annahme ist $x \notin \mathfrak{p}_1$. Aber $\tilde{a}_i \cdot x^{n-1} = a_i \in \mathfrak{p}_1$. Da x^{n-1} nicht in $\mathfrak{p}_1$ ist, muss $\tilde{a}_i \in \mathfrak{p}_1$ gelten. Daraus folgt nun

$$s^n = -(\tilde{a}_{n.1} s^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_1) \in \mathfrak{p}_1 B \subseteq \mathfrak{p}_2 \cdot B \subseteq \mathfrak{q}_2$$

im Widerspruch zu $s \notin \mathfrak{q}_2$. □

7 Kettenbedingungen

Definition 7.1. Sei $(I, \leq)$ eine angeordnete Menge.

i) $(I, \leq)$ erfüllt die *aufsteigende Kettenbedingung* („ascending chain condition“), wenn für jede Kette

$$i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq \ldots$$

mit $i_j \in I$ für $j \in \mathbb{N}$ ein $n \geq 1$ existiert, sodass $i_m = i_n$ für alle $m \geq n$ gilt:.

ii) Analog erfüllt $(I, \leq)$ die *absteigende Kettenbedingung* („descending chain condition“), wenn für alle Ketten

$$i_1 \geq i_2 \geq \ldots$$

ein $n \geq 1$ existiert, sodass $i_m = i_n$ für alle $m \geq n$ gilt ($(I, \geq)$ erfüllt also die aufsteigende Kettenbedingung).

Lemma 7.2. *Sei $(I, \leq)$ angeordnet. Dann sind äquivalent:*

i) *$(I, \leq)$ erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung.*

ii) *Sei $J \subseteq I$ nicht leer. Dann hat J ein maximales Element.*

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii): Angenommen, es existiert ein nicht leeres $J \subseteq I$ ohne maximales Element. Dann existiert ein nicht maximales Element $i_1 \in J$, weshalb wieder um ein $i_2 \in J$ mit $i_2 > i_1$ existiert. Induktiv erhalten wir einen Widerspruch zur aufsteigenden Kettenbedingung.

ii) $\Rightarrow$ i): Sei $i_1 \leq i_2 \leq \ldots$ eine aufsteigende Kette. Die Menge $\{i_n\}_{n \geq 1}$ hat dann ein maximales Element. □

Definition 7.3. Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Definiere

$$\mathcal{U}(M) = \{N \mid N \text{ ist } A\text{-Untermodul von } M\}.$$

$(\mathcal{U}, \subseteq)$ ist angeordnet.

i) M heißt *noethersch*, wenn $(\mathcal{U}(M), \subseteq)$ die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt.

ii) M heißt *artinsch*, wenn $(\mathcal{U}(M), \subseteq)$ die absteigende Kettenbedingung erfüllt.

iii) A heißt noethersch bzw. artinsch, wenn ${}_AA$ noethersch bzw. artinsch ist.

Beispiel 7.4.

i) Jeder Körper ist noethersch und artinsch.

ii) Für einen Körper k ist $A = k[t]$ noethersch, aber nicht artinsch.

iii) $\mathbb{Z}$ ist noethersch, aber nicht artinsch.

iv) $k[t_1, t_2, \dots]$ ist weder noethersch noch artinsch.

Bemerkung.

i) Artinsche Ringe sind noethersch; aus Zeitgründen können wir hier keinen Beweis geben.

ii) In der Vorlesung werden wir uns auf noethersche Ringe beschränken. Mehr zu artinschen Ringen findet man etwa in [AM04, Kapitel 8].

7.1 Noethersche Ringe und Moduln

Satz 7.5. *Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:*

i) *M ist noethersch.*

ii) *Alle A-Untermoduln von M sind endlich erzeugt.*

Insbesondere ist also jeder noethersche Modul endlich erzeugt.

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii): Sei $N \subseteq M$ ein A-Untermodul. Definiere

$$\Sigma := \{N' \subseteq N \mid N' \text{ ist } A\text{-Untermodul und endlich erzeugt}\} \subseteq \mathcal{U}(M).$$

Da $\Sigma \neq \emptyset$ existiert ein maximales $N' \in \Sigma$. Sei $x \in N$. Dann gilt $N' \subseteq N' + \langle x \rangle_A \subseteq N$ und $N' + \langle x \rangle_A$ ist endlich erzeugt. Damit folgt $x \in N'$. Da N' maximal gewählt war, ist $N = N'$ und N ist endlich erzeugt.

ii) $\Rightarrow$ i): Sei $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Kette in $\mathcal{U}(M)$. Definiere

$$N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i.$$

N ist ein Untermodul, es sei also etwa $N = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Für jedes i existiert nun ein m_i mit $x_i \in N_{m_i}$. Wähle $m \geq \max\{m_1, \dots, m_n\}$. Dann folgt $N = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subseteq N_m \subseteq N$. □

[4. Juni 2018]

[7. Juni 2018]

Satz 7.6. *Sei A ein Ring.*

i) *Sei $0 \to M' \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Dann gilt:*

$$M \text{ ist noethersch.} \quad \Longleftrightarrow \quad M' \text{ und } M'' \text{ sind noethersch.}$$

ii) *Sei A noethersch und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist M noethersch.*

Beweis.

i) „$\Rightarrow$“: Sei $M_1'' \subseteq M_2'' \subseteq \dots$ eine Kette von Untermoduln von M''. Dann ist $\pi^{-1}(M_1'') \subseteq \pi^{-1}(M_2'') \subseteq \dots$ eine Kette in M. Es existiert also ein n, sodass $\pi^{-1}(M_m'') = \pi^{-1}(M_n'')$ für alle $m \geq n$ gilt. Da $\ker \pi \subseteq M_n'' \subseteq M_m''$ ist, folgt $M_m'' = M_n''$. Für M' ist der Beweis ähnlich.

„$\Leftarrow$“: Sei $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ eine Kette in M. Betrachte die Ketten

$$\iota^{-1}(M_1) \subseteq \iota^{-1} M_2 \subseteq \dots \qquad \text{in } M'$$

und

$$\pi(M_1) \subseteq \pi(M_2) \subseteq \dots \qquad \text{in } M''.$$

Es gibt also ein n, sodass für alle $m \geq n$ gilt: $i^{-1}(M_m) = i^{-1}(M_n)$ und $\pi(M_m) = \pi(M_n)$.

Damit gilt bereits $M_m = M_n$. Zum Beweis sei $x \in M_m$. Dann ist $\pi(x) \in \pi(M_m) = \pi(M_n)$, es existiert also ein $x' \in M_n$ mit $\pi(x) = \pi(x')$. Somit liegt $x - x'$ in $\ker \pi = \operatorname{im} \iota$, weshalb wiederum ein $y \in M'$ mit $\iota(y) = x - x' \in M_m$ existiert. Daraus folgt $y \in \iota^{-1}(M_m) = \iota^{-1}(M_n)$, also $x = \iota(y) + x' \in M_n$.

ii) Ist M ein endlich erzeugter A-Modul, so existiert eine A-lineare surjektive Abbildung $\varphi\colon A^n \to M$. A^n ist noethersch (verwende die kurze exakte Sequenz $0 \to A^{n-1} \to A^n \to A \to 0$ sowie Induktion). Nach i) ist M damit auch noethersch. □

Satz 7.7. *Sei A ein noetherscher Ring.*

i) *Für ein Ideal* $I \subseteq A$ *ist* A/I *noethersch.*

ii) *Für eine multiplikative Teilmenge* $S \subseteq A$ *ist* $S^{-1}A$ *noethersch.*

Beweis.

i) Folgt sofort aus Satz 7.6 i).

ii) Für ein Ideal $J \subseteq S^{-1}A$ gilt $(J \cap A) \cdot S^{-1}A = J$. □

Satz 7.8 (Hilberts Basissatz)**.** *Sei* A *ein noetherscher Ring. Dann ist auch* $A[t_1, \dots, t_n]$ *noethersch.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $n = 1$ annehmen. Wir zeigen, dass jedes Ideal $J \subseteq A[t]$ endlich erzeugt ist.

Angenommen, ein Ideal $J \subseteq A[t]$ ist nicht endlich erzeugt. Wähle $f_1 \in J \setminus \{0\}$ mit $d_1 := \deg f_1$ minimal. Dabei gilt $(f_1) \subsetneq J$. Wähle $f_2 \in J \setminus (f_1)$ von minimalem Grad d_2 usw.

Wir erhalten eine Folge $f_1, f_2, f_3, \dots \in J$ mit $f_n \notin (f_1, \dots, f_{n-1})$ und minimalem $d_n = \deg f_n$. Insbesondere gilt

$$d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots.$$

Sei $a_n \in A$ der Leitkoeffizient von f_n. Definiere $I := (a_1, a_2, \dots)$. Da A noethersch ist, ist I endlich erzeugt. Folglich existiert ein n, sodass $I = (a_1, \dots, a_n)$.

Betrachte nun $a_{n+1} \in (a_1, \dots, a_n)$. Es existieren folglich Elemente u_i mit $a_{n+1} = \sum_{i=1}^n u_i a_i$. Definiere nun

$$g := \sum_{i=1}^n u_i f_i t^{d_{n+1} - d_i} \in J.$$

Damit gilt $\deg g = d_{n+1} = \deg f_{n+1}$ und der Leitkoeffizient von g ist $\sum_{i=1}^n u_i a_i = a_{n+1}$. Wir haben $f_{n+1} \notin (f_1, \dots, f_n) \ni g$, also $f_{n+1} - g \notin (f_1, \dots, f_n)$ und $\deg(f_{n+1} - g) < d_{n+1}$ im Widerspruch zur Konstruktion. □

7.2 Minimale Primideale

Definition 7.9. Sei A ein Ring. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ heißt *minimales Primideal*, wenn für alle $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$ schon $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ gilt. Wir bezeichnen die Menge aller minimalen Primideale mit

$$\operatorname{MinSpec} A := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \text{ minimal}\}.$$

Beispiel 7.10.

i) Falls A ein Integritätsbereich ist, so gilt $\operatorname{MinSpec} A = \{0\}$.

ii) Sei k ein Körper. Betrachte $A = {}^{k[x,y]}/_{(xy)}$. Dann gilt $\operatorname{MinSpec} A = \{(x), (y)\}$.

Denn wir haben die Bijektion

$$\operatorname{Spec} A \xleftrightarrow{1:1} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[x,y] \mid p \supseteq (xy)\}.$$

Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[x,y]$ mit $\mathfrak{p} \supseteq (xy)$ folgt aus $xy \in \mathfrak{p}$ aber $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$, also $(x) \subseteq \mathfrak{p}$ oder $(y) \subseteq \mathfrak{p}$. Falls $\mathfrak{p}$ minimal ist, so folgt $(x) = \mathfrak{p}$ oder $(y) = \mathfrak{p}$.

Satz 7.11. *Sei A ein noetherscher Ring. Dann ist $|\operatorname{MinSpec} A| < \infty$.*

Beweis. Sei

$$\Sigma = \{I \mid I \subsetneq A \text{ Ideal}, \operatorname{MinSpec}({}^{A}/_{I}) = \emptyset\}.$$

Es genügt, $\Sigma = \emptyset$ zu zeigen. Angenommen, $\Sigma \neq \emptyset$. Da A noethersch ist, existiert ein maximales $I \in \Sigma$. Es gilt also $I \notin \operatorname{Spec} A$, da sonst $\operatorname{MinSpec}({}^{A}/_{I}) = \{(0)\}$ gelten würde.

Also existieren $a, b \in A \setminus I$ mit $ab \in I$. Folglich gilt $I + (a), I + (b) \supsetneq I$, also $I + (a), I + (b) \notin \Sigma$. Damit folgt, dass $\operatorname{MinSpec}({}^{A}/_{I+(a)})$ und $\operatorname{MinSpec}({}^{A}/_{I+(b)})$ endlich sind.

Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{MinSpec}({}^{A}/_{I})$. Dann gilt $\pi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$ mit $I \subseteq \pi^{-1}(\mathfrak{q})$, also $ab \in \pi^{-1}(\mathfrak{q}) =: \mathfrak{p}$. Also gilt $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$; sei ohne Einschränkung $a \in \mathfrak{p}$. Es folgt $\mathfrak{p} \supseteq I + (a)$, also $\pi_a(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Spec}({}^{A}/_{I+(a)})$ und sogar $\pi_a(\mathfrak{p}) \in \operatorname{MinSpec}({}^{A}/_{I+(a)})$ (wobei $\pi_a \colon A \to {}^{A}/_{I+(a)}$ ist).

Also haben wir INSERT „DIAGRAMM“ (spuriöse Anführungszeichen) HIER.

Das ist ein Widerspruch. □

7.3 Transzendenzbasen

Definition 7.12. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ in L heißt *Transzendenzbasis* von L über K, falls

i) $(x_i)_{i \in I}$ algebraisch unabhängig über K und

ii) $K(x_i)_{i \in I} \subseteq L$ algebraisch ist.

Satz 7.13. *Sei $K \subseteq L$ Körpererweiterung, seien $x_i \in L$ mit $i \in I$.*

i) *Ist $(x_i)_{i \in I}$ algebraisch unabhängig und maximal, so ist $(x_i)_{i \in I}$ eine Transzendenzbasis.*

ii) *Ist $K(x_i)_{i \in I} \subseteq L$ algebraisch und $(x_i)_{i \in I}$ minimal mit dieser Eigenschaft, so ist $(x_i)_{i \in I}$ eine Transzendenbasis.*

iii) *$K \subseteq L$ hat eine Transzendenbasis.*

Beweis. Ähnlich wie bei Basen von Vektorräumen über Körpern. □

Satz 7.14. *Seien $(x_i)_{i \in I}$, $(y_j)_{j \in J}$ Transzendenbasen von $K \subseteq L$. Dann existiert eine Bijektion zwischen I und J.*

Beweis. Wir beweisen nur den Fall $|I|, |J| < \infty$. Es genügt zu zeigen, dass für über K algebraisch unabhängige $(x_1, \ldots, x_m)$ und algebraische $(y_1, \ldots, y_n)$ mit $K(y_1, \ldots, y_n) \subseteq L$ dann $m \leq n$ gilt und Elemente $1 \leq j_{m+1} < \cdots < j_n \leq n$ mit

$$K(x_1, \ldots, x_m, y_{j_{m+1}}, \ldots, y_{j_n}) \subseteq L$$

algebraisch existieren. Dies beweisen wir per Induktion nach m.

$m = 1$: Wähle s minimal, sodass $1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n$ und $f(t_0, t_{i_1}, \ldots, t_{i_j}) \in K[t_0, t_{i_1}, \ldots, t_{i_j}] \setminus \{0\}$ mit $f(x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_j}) = 0$ existieren. Es gilt $s \geq 1$ (da x_1 transzendent). Schreibe

$$f(t_0, t_{i_1}, \ldots, t_{i_j}) = \sum_{d \geq 0} f_d(t_0, t_{i_2}, \ldots, t_{i_j}) t_{i_1}^d.$$

Es existiert also ein $d \geq 1$ mit $f_d \neq 0$ (sonst wäre $f = f_0$, ein Widerspruch zur Minimalität von s) und $f_d(x_1, y_{i_1}, \ldots, y_{i_j}) \neq 0$ (wieder aufgrund der Minimalität von s). Damit ist y_{i_1} algebraisch über $K(x_1, y_{i_2}, \dot{;} y_{i_j}) \subseteq K(x_1, y_1, \ldots, \hat{y_{i_1}}, \ldots, y_n)$.

$m - 1 \to m$: Insbesondere ist $(x_1, \ldots, x_{m-1})$ algebraisch unabhängig. Nach Induktionsvoraussetzung ist $m-1 \leq n$ und ohne Einschränkung $K(x_1, \ldots, x_{m-1}, y_m, \ldots, y_n) \subseteq L$ algebraisch. Außerdem ist x_m transzendent über $K(x_1, \ldots, x_{m-1})$. Nach dem Induktionsanfang ist $1 \leq n - m + 1$ und (nach eventuellem Umnummerieren) $K(x_1, \ldots, x_{m-1})(y_m, y_{m+1}, \ldots, y_n) \subseteq L$ algebraisch. □

Definition 7.15. Sei $K \subseteq L$ Körpererweiterung. Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine Transzendenzbasis von L über K. Dann heißt

$$\operatorname{trdeg}(L \mid K) := |I| \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

der *Transzendenzgrad* von $K \subseteq L$.

7.4 Noether-Normalisierung

Satz 7.16 (Noether-Normalisierung)**.** *Sei k ein Körper und A eine endlich erzeugte k-Algebra. Seien $I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_m \subsetneq A$ Ideale. Dann existiert ein $n \geq 0$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ sowie $0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_m \leq n$, sodass die folgenden Aussagen gelten.*

i) *$a_1, \ldots, a_n$ sind algebraisch unabhängig über k.*

ii) *$k[a_1, \ldots, a_n] \subseteq A$ endlich (hier äquivalent zur Ganzheit).*

iii) $I_l \cap k[a_1, \ldots, a_n] = (a_1, \ldots, a_{h_l})$

Zusätzlich gilt

$$n = \max_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p}) \mid k) = \max_{\mathfrak{p} \in \operatorname{MinSpec} A} \operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p}) \mid k).$$

[7. Juni 2018]

[11. Juni 2018]

Beweis.

Schritt 1: Sei $A = k[t_1, \dots, t_n]$ der Polynomring sowie $a \in A \setminus (A^\times \cup \{0\})$. Wir beweisen nun, dass Elemente $a_2, \dots, a_n \in A$ existieren, sodass $k[a, a_2, \dots, a_n] \subseteq A$ endlich ist.

Beweis. Mit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ schreiben wir $t^\lambda = t_1^{\lambda_1} \dots t_n^{\lambda_n}$. Sei $a = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\lambda t^\lambda$ für gewisse $c_\lambda \in k$. Definiere

$$\Lambda_a := \left\{ \lambda \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \;\middle|\; c_\lambda \neq 0 \right\}.$$

Nun gibt es $r_2, \dots, r_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, sodass für alle $\lambda, \mu \in \Lambda_a$ mit $\lambda \neq \mu$ dann

$$\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \dots + r_n\lambda_n \neq \mu_1 + r_2\mu_2 + \dots + r_n\mu_n$$

gilt. Um dies zu sehen, setzen wir

$$R := \max_{\lambda \in \Lambda_a} \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$$

und definieren $r_i := (R+1)^{i-1}$. Es seien also $\lambda, \mu \in \Lambda_a$ mit $\lambda \neq \mu$. Sei

$$m := \max\{1 \leq i \leq n \mid \lambda_i \neq \mu_i\},$$

also insbesondere $m \geq 1$. Wir nehmen ohne Einschränkung $\lambda_m < \mu_m$ an. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n r_i\mu_i - r_i\lambda_i &= r_m(\mu_m - \lambda_m) + \sum_{i=1}^{m-1} r_i(\mu_i - \lambda_i) \geq r_m - \sum_{i=1}^{m-1} r_i R \\ &= (R+1)^{m-1} - \sum_{i=1}^{m-1} R(R+1)^{i-1} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Definiere nun $a_i = t_i - t_i^{r_i}$ für $i = 2, \dots, n$. Es gilt $k[a, a_2, \dots, a_n][t_1] = k[t_1, \dots, t_n]$. Es genügt zu zeigen, dass t_1 ganz über $k[a, a_2, \dots, a_n]$ ist. Sei $\mu \in \Lambda_a$ das eindeutig bestimmte Element, für welches

$$\mu_1 + r_2\mu_2 + \dots + r_k\mu_k = \max_{\lambda \in \Lambda_a}(\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \dots + r_n\lambda_n) =: s$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 = a - a &= \sum_{\lambda \in \Lambda_a} c_\lambda t^\lambda - a = \sum c_\lambda t_1^{\lambda_1}(a_2 + t_2^{r_2})^{\lambda_2} \dots (a_n + t_n^{r_n})^{\lambda_n} - a \\ &= b_s t_i^s + b_{s-1} t_{i-1}^{s-1} + \dots + b_0 \end{aligned}$$

für gewisse $b_0, \dots, b_s \in k[a, a_2, \dots, a_n]$ und $b_s = c_\mu \in k \setminus \{0\} = A^\times$.

Damit ist t_1 ganz über $k[a, a_2, \dots, a_n]$. □

Schritt 2: Der Satz ist richtig für $A = k[t_1, \dots, t_n]$ und $m = 1$.

Beweis durch Induktion nach n. Sei $I = I_1$. Da der Fall $n = 0$ klar ist, wenden wir uns dem Induktionsschritt von $n - 1$ nach n zu.

Für $I = (0)$ ist die Aussage klar. Sei also $I \neq (0)$. Sei $a_1 \in I \setminus \{0\}$. Dann ist aber $a_1 \notin A^\times \cup \{0\}$. Nach Schritt 1 existieren $a'_2, \dots, a'_n \in A$ mit $k[a_1, a'_2, \dots, a'_n] \subseteq A$ endlich. Die a'_i sind algebraisch unabhängig über k, da $\operatorname{trdeg}(k[a_1, a'_2, \dots, a'_n] \mid k) = n$. Damit ist $k[a_1, a'_2, \dots, a'_n]$ ein Polynomring. Betrachte $I' = I \cap k[a'_2, \dots, a'_n]$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $a_2, \dots, a_n \in k[a'_2, \dots, a'_n]$ und $1 \leq h \leq n$ mit $k[a_2, \dots, a_n] \subseteq k[a'_2, \dots, a'_n]$ ganz (endlich) und $I' \cap k[a_2, \dots, a_n] = (a_2, \dots, a_h)$. Automatisch sind $a_2, \dots, a_n$ algebraisch unabhängig über k. Wir erhalten

$$k[a_1, a_2, \dots, a_n] \subseteq k[a_1, a'_2, \dots, a'_n] \subseteq A,$$

wobei beide Inklusionen ganz sind. Außerdem gilt wegen $a_i \in I$

$$\begin{aligned} I \cap k[a_1, a_2, \dots, a_n] &= (I \cap k[a_2, \dots, a_n]) + (a_i) = (a_2, \dots, a_k) + (a_1) \\ &= (a_1, \dots, a_k). \end{aligned}$$

Denn sei A eine k-Algebra, $x, y \in A$ und $I \subseteq A$ ein Ideal mit $x \in I$. Dann gilt $I \cap k[x, y] = (x) + (I \cap k[y])$: „$\supseteq$“ ist dabei klar. Für „$\subseteq$“ sei $f \in I \cap k[x, y]$. Dann gibt es $a_{ij} \in k$ mit

$$f = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j = \sum_{i>0, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j + \sum_{j \geq 0} a_{0j} y^j$$

und damit ist $\sum_{j \geq 0} a_{0j} y^j \in I \cap k[y]$. $\square$

Schritt 3: Der Satz ist richtig für $A = k[t_1, \dots, t_n]$.

Beweis durch Induktion nach m. Da der Induktionsanfang gerade Schritt 2 ist, betrachten wir nun den Induktionsschritt von $m - 1$ nach m.

Betrachte die Idealkette $I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_{m-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $b_1, \dots, b_n \in A$ und $0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_{m-1} \leq n$ mit $k[b_1, \dots, b_n] \subseteq A$ ganz und $I_l \cap k[b_1, \dots, b_n] = (b_1, \dots, b_{n_l})$ für $l = 1, \dots, m - 1$. Definiere $s := h_{m-1}$ und $J := I_m \cap k[b_{s+1}, \dots, b_n] \subsetneq k[b_{s+1}, \dots, k_n]$. Aus dem vorherigen Schritt folgt, dass $a_{s+1}, \dots, a_n \in k[b_{s+1}, \dots, b_n]$ und $h_m \in \{s, \dots, n\}$ existieren, sodass $k[a_{s+1}, \dots, a_n] \subseteq k[b_{s+1}, \dots, b_n]$ ganz und $J \cap k[a_{s+1}, \dots, a_n] = (a_{s+1}, \dots, a_{h_m})$ ist. Definiere nun $a_i := b_i$ für $i = 1, \dots, s$. Dann folgt

$$k[a_1, \dots, a_n] \subseteq k[b_1, \dots, b_n] \subseteq A,$$

wobei beide Inklusionen ganz sind. Außerdem gilt

$$I_l \cap k[a_1, \dots, a_n] = (I_l \cap k[b_1, \dots, b_n]) \cap k[b_1, \dots, b_s, a_{s+1}, \dots, a_n] = (b_1, \dots, b_{h_l})$$

für $l = 1, \dots, m - 1$. Weiterhin haben wir

$$I_m \cap k[a_1, \dots, a_n] = (a_1, \dots, a_s) + (I_k \cap k[a_{s+1}, \dots, a_n]) = (a_1, \dots, a_{h_l}). \qquad \square$$

Schritt 4: Der Satz gilt allgemein.

Beweis. Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra; es existiert also ein surjektiver k-Algebrenhomomorphismus

$$f\colon k[t_1,\dots,t_N] \longrightarrow A$$

Betrachte die Idealkette

$$J_0 := \ker f \subseteq J_1 := f^{-1}(I_1) \subseteq \cdots \subseteq J_m := f^{-1}(I_m) \subseteq k[t_1,\dots,t_N].$$

Aus Schritt 3 folgt, dass $b_1,\dots,b_N \in k[t_1,\dots,t_N]$ und $0 \le j_0 \le \cdots \le j_m \le N$ mit $k[b_1,\dots,b_N] \subseteq k[t_1,\dots,t_N]$ ganz und $J_l \cap k[b_1,\dots,b_N] = (b_1,\dots,b_{j_l})$ für $l = 0,\dots,m$ existieren.

Definiere $a_i = f(b_{j_0+i})$ für $1 \le i \le n = N - j_0$. Dann sind $a_1,\dots,a_n$ algebraisch unabhängig über k, da das Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[t_{j_0+1},\dots,t_N] \arrow[r, "t_i\mapsto b_i"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_{a_i}"] & k[t_1,\dots,t_N] \arrow[dl, "f"] \\ A & \end{tikzcd}$$

kommutiert und $\ker f = (b_1,\dots,b_{j_0})$, also $\mathrm{ev}_{(a_i)}$ injektiv ist.

Betrachten wir weiterhin das Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[a_1,\dots,a_n] & \subseteq & A \\ k[b_1,\dots,b_N] \arrow[u, two heads, "\overline{f}"] & \overset{\text{ganz}}{\subseteq} & k[t_1,\dots,t_N], \arrow[u, two heads, "f"'] \end{tikzcd}$$

so folgt, dass $k[a_1,\dots,a_n] \subseteq A$ ganz, also endlich ist. Da $J_t \supseteq \ker f$, gilt

$$\begin{aligned} I_l \cap k[a_1,\dots,a_n] &= \overline{f}(\overline{f}^{-1}(I_1 \cap k[a_1,\dots,a_n])) = \overline{f}(J_l \cap k[b_1,\dots,b_N]) \\ &= \overline{f}(b_1,\dots,b_{j_l}) = (a_1,\dots,a_{h_l}), \end{aligned}$$

wobei $h_l = j_l - j_0$. □

Schritt 5: Wir zeigen nun noch den Zusatz. Definiere

$$m_1 := \max_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} A} \operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p}) \mid k) \quad \text{und} \quad m_2 := \max_{\mathfrak{p}\in\operatorname{MinSpec} A} \operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p}) \mid k).$$

Wir zeigen nun $n \ge m_1 \ge m_2 \ge n$.

$m_1 \le n$: Setze $B := k[a_1,\dots,a_n] \subseteq A$. Dann ist $B \subseteq A$ endlich. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Dann ist $\operatorname{Quot}(B/\mathfrak{p}\cap B) \hookrightarrow \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})$ eine algebraische Körpererweiterung. Dann ist

$$\operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(B/\mathfrak{p} \cap B) \mid k) = \operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p}) \mid k).$$

Da $\operatorname{Quot}(B/\mathfrak{p}\cap B) = k(\overline{a_1},\dots,\overline{a_n})$, ist $\operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(B/\mathfrak{p}\cap B)) \le n$, also $m_1 \le n$.

$m_2 \leq m_1$ Klar.

$n \leq m_2$: Da $B \subseteq A$ ganz ist und B ein Integritätsbereich ist, gibt es nach Proposition 6.8 ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p} \cap B = (0)$. Insbesondere gibt es ein $\mathfrak{p}' \in \operatorname{MinSpec} A$ mit $\mathfrak{p}' \cap B = (0)$. Das bedeutet, dass

$$\operatorname{Quot}(B) = \operatorname{Quot}(B/\mathfrak{p}' \cap B) \subseteq \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p}'),$$

wobei die letzte Erweiterung algebraisch ist. Dadurch erhalten wir

$$n = \operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(B) \mid k) = \operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p}') \mid k) \leq m_2. \qquad \square$$

[11. Juni 2018]

[14. Juni 2018]

Korollar 7.17. *Sei $A \subseteq B$ eine endlich erzeugte Ringerweiterung sowie A ein Integritätsbereich. Dann gilt:*

i) *Es existieren $s \in A \setminus \{0\}$ und $b_1, \ldots, b_n \in B$ mit*
   - *$b_1, \ldots, b_n$ algebraisch unabhängig über $\operatorname{Quot}(A)$ und*
   - *$A[s^{-1}][b_1, \ldots, b_n] \subseteq B[s^{-1}]$ endlich.*[1]

ii) *Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A[s^{-1}]$ existiert ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B[s^{-1}]$ mit $\mathfrak{q} \cap A[s^{-1}] = \mathfrak{p}$.*

iii) *Für dieses $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gilt*

$$\operatorname{Quot}\left(A/\mathfrak{p} \cap A\right) = \operatorname{Quot}\left(A[s^{-1}]/\mathfrak{p}\right) \subseteq \operatorname{Quot}(B[s^{-1}]/\mathfrak{q}) = \operatorname{Quot}(B/\mathfrak{q} \cap B).$$

Beweis.

i) Sei $S := A \setminus \{0\}$. Erhalte $\operatorname{Quot}(A) = S^{-1}A \subseteq S^{-1}B$ endlich erzeugt. Nach der Noether-Normalisierung existieren über $\operatorname{Quot} A =: K$ algebraisch unabhängige $b'_1, \ldots, b'_n \in S^{-1}B$ mit $K[b'_1, \ldots b'_n] \subseteq S^{-1}B$ ganz.

Wir schreiben $b'_i = \frac{b_i}{s_i}$ mit $b_i \in B, s_i \in S$. Dann sind die $b_1, \ldots, b_n$ ebenfalls algebraisch unabhängig über K und es gilt $K[b_1, \ldots, b_n] = K[b'_1, \ldots, b'_n]$.

Seien $c_1, \ldots c_N \in B$ mit $B = A[c_1, \ldots c_N]$. Da $S^{-1}B$ ganz über $K[b_1, b_n]$ ist, existieren normierte $f_i \in K[b_1, \ldots b_n][t]$ mit $f_i(\frac{c_i}{1}) = 0$. Wähle $u \in S$ so, dass die Koeffizienten aller $f_1, \ldots, f_N$ im Bild von $A[u^{-1}][b_1, \ldots, b_n] \to K[b_1, \ldots, b_n]$ liegen, und wähle dann normierte $g_i \in A[u^{-1}][b_1, \ldots, b_n]$ als Urbilder der f_i. Betrachte $g_i(c_i) \in B[u^{-1}]$. Dann gilt $g_i(c_i) \in \ker(B[u^{-1}] \to S^{-1}B)$ (denn $g_i(c_i) \mapsto f_i(c_i) = 0$).

Somit existieren $v_i \in A \setminus \{0\}$ mit $v_i \cdot g_i(c_i) = 0 \in B[u^{-1}]$. Definiere $v := v_1 \ldots v_n \in A \setminus \{0\}$. Wir setzen $s := uv$. Betrachte nun die Bilder h_i von g_i unter $A[u^{-1}][b_1, \ldots, b_n][t] \to A[s^{-1}][b_1, \ldots b_n][t]$.

[1] Man beachte $A[b_1, \ldots b_n][s^{-1}] = A[s^{-1}][b_1, \ldots, b_n]$.

Es ist $h_i(c_i) = 0$ (denn $v \cdot h_i(c_i) = 0$ in $B[s^{-1}]$). Außerdem sind die h_i normiert, da die g_i normiert sind. Also sind die c_i ganz über $A[s^{-1}][b_1, \ldots b_n]$ und somit ist $A[s^{-1}][b_1, \ldots, b_n] \subseteq B[s^{-1}]$ endlich.

ii) Da die $b_1, \ldots b_n$ algebraisch unabhängig über $A[s^{-1}]$ sind, ist $A[s^{-1}][b_1, \ldots, b_n]$ isomorph zum Polynomring. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A[s^{-1}]$, betrachte $\mathfrak{p}' \in \mathfrak{p} \cdot A[s^{-1}][b_1, \ldots, b_n] + (b_1, \ldots, b_n)$. Dann ist $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$. Außerdem ist ${}^{A[s^{-1}][b_1,\ldots,b_n]}/_{\mathfrak{p}'} \cong {}^{A[s^{-1}]}/_{\mathfrak{p}}$. Also ist $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(A[s^{-1}][b_1, \ldots, b_n])$.

   Nach Proposition 6.8 existiert ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B[s^{-1}]$ mit $\mathfrak{q} \cap A[s^{-1}][b_1, \ldots, b_n] = \mathfrak{p}'$, woraus $\mathfrak{q} \cap A[s^{-1}] = \mathfrak{p}' \cap A[s^{-1}] = \mathfrak{p}$ folgt.

iii) Wir betrachten das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} A[s^{-1}][b_1, \ldots, b_n] & \overset{\text{endlich}}{\subseteq} & B[s^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^{A[s^{-1}]}/_{\mathfrak{p}} \cong {}^{A[s^{-1}][b_1,\ldots b_n]}/_{\mathfrak{p}'} & \longhookrightarrow & {}^{B[s^{-1}]}/_{\mathfrak{q}} \end{array}$$

   Also ist auch ${}^{A[s^{-1}]}/_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow {}^{B[s^{-1}]}/_{\mathfrak{q}}$ endlich.

   Außerdem ist damit $\operatorname{Quot}(A[s^{-1}]) \hookrightarrow \operatorname{Quot}(B[s^{-1}]/q)$ eine endliche Körpererweiterung. Zum Beweis sei $R := {}^{A[s^{-1}]}/_{\mathfrak{p}}$ und $S := {}^{B[s^{-1}]}/_{\mathfrak{q}}$ (Integritätsbereiche). Dann ist $R \subseteq S$ endlich, und $\operatorname{Quot} R \subseteq \operatorname{Quot} S$ ist endlich erzeugt. Sei nun $T := R \setminus \{0\}$. Es ist $T^{-1}R \hookrightarrow T^{-1}S$ ganz. Also ist $T^{-1}S$ ein Körper und es folgt $T^{-1}S = \operatorname{Quot} S$. Dann ist $\operatorname{Quot} R \hookrightarrow \operatorname{Quot} S$ algebraisch.

   Schließlich gilt $\operatorname{Quot}({}^{A[s^{-1}]}/_{\mathfrak{p}}) \cong \operatorname{Quot}({}^{A}/_{\mathfrak{p}\cap A})$ wegen $s \notin \mathfrak{p} \cap A$ und

$$\operatorname{Quot}({}^{A[s^{-1}]}/_{\mathfrak{p}}) \cong {}^{A[s^{-1}]_{\mathfrak{p}}}/_{\mathfrak{p} \cdot A[s^{-1}]_{\mathfrak{p}}} \cong {}^{A_{\mathfrak{p}\cap A}}/_{\mathfrak{p}\cap A} \cdot A_{\mathfrak{p}\cap A} \cong \operatorname{Quot}({}^{A}/_{\mathfrak{p}\cap A}). \qquad \square$$

7.5 Jacobson-Ringe

Definition 7.18. Ein Ring A heißt *Jacobson-Ring*, wenn

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A, \\ \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{m}$$

für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ gilt.

Bemerkung 7.19. Sei A ein Ring. Dann sind äquivalent:

i) A ist Jacobson.

ii) Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ existiert ein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ und $a \notin \mathfrak{m}$.

iii) Für alle Ideale I in A gilt

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A, \\ \mathfrak{m} \supseteq I}} \mathfrak{m}.$$

Beispiel 7.20.

i) Jeder Körper ist Jacobson.

ii) $\mathbb{Z}$ ist Jacobson

iii) $\mathbb{Z}_{(p)}$ für p prim ist nicht Jacobson. Allgemeiner sind lokale Ringe, die ein Integritätsbereich, aber kein Körper sind, nicht Jacobson.

Proposition 7.21. *Sei A ein Jacobson-Ring sowie B ganz über A. Dann ist B Jacobson.*

Beweis. Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ und definiere

$$J := \bigcap_{\substack{\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B, \\ \mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{q}}} \mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{q}.$$

Wir zeigen nun $\mathfrak{q} = J \cap A$. Definiere $\mathfrak{q} \cap A =: \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Per Definition gilt $\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A, \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{m}$. Sei also $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ mit $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{p}$. Nach Going up existiert ein $\mathfrak{n} \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{q}$. Mit Proposition 6.8 folgt $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$. Da $\mathfrak{m}$ beliebig war, gilt $J \cap A = \mathfrak{p}$.

Wir betrachten den Ringhomomorphismus $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{q} \cdot B_\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B_\mathfrak{p}$, da $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Außerdem $\mathfrak{q} \cdot B_\mathfrak{p} \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(A_\mathfrak{p})$. Nach Proposition 6.8 gilt dann $\mathfrak{q} \cdot B_\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(B_\mathfrak{p})$, da $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p}$ ganz.

Da $(J \cap A) \cap (A \cap \mathfrak{p}) = \emptyset$, haben wir $J \cdot B_\mathfrak{p} \subsetneq B_\mathfrak{p}$. Andererseits gilt $J \supseteq \mathfrak{q}$, also $J \cdot B_\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q} \cdot B_\mathfrak{p}$ und damit $J \cdot B_\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cdot B_\mathfrak{p}$. Es folgt $J \subseteq (J \cdot B_\mathfrak{p}) \cap B = (\mathfrak{q} \cdot B_\mathfrak{p}) \cap B = \mathfrak{q}$. ☐

Satz 7.22. *Sei A ein Jacobson-Ring und B endlich erzeugte A-Algebra. Dann gilt:*

i) *B ist Jacobson.*

ii) *Für alle $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ gilt $\mathfrak{n} \cap A \in \operatorname{Max} A$ und $A/_{\mathfrak{n} \cap A} \hookrightarrow B/_{\mathfrak{n}}$ ist endlich.*

Beweis.

i) Wir zeigen, dass B Jacobson ist. Sei dazu $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ und $b \in B \setminus \mathfrak{q}$. Es ist zu zeigen, dass ein $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{n}$ und $b \notin \mathfrak{n}$.

Wir betrachten die Ringerweiterung $A' := A/_{\mathfrak{q} \cap A} \hookrightarrow B/_{\mathfrak{q}} \hookrightarrow (B/_{\mathfrak{q}})[b^{-1}] =: B'$. Es ist A' ein Integritätsbereich und B' eine endlich erzeugte A'-Algebra. Nach Korollar 7.17 existiert ein $s' \in A' \setminus \{0\}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A'$ und $s' \notin \mathfrak{p}'$ existiert ein $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} B'$, sodass $\mathfrak{q}' \cap A' = \mathfrak{p}'$ gilt und $\operatorname{Quot}(A'/_{\mathfrak{p}'}) \hookrightarrow \operatorname{Quot}(B'/_{\mathfrak{q}'})$ endlich ist.

Wähle ein Urbild s von s' unter $A \to A' = A/_{\mathfrak{q} \cap A}$, also $s \notin \mathfrak{q} \cap A$. Da A Jacobson ist, existiert ein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ mit $\mathfrak{q} \cap A \subseteq \mathfrak{m}$ und $s \notin \mathfrak{m}$. Dann ist $s' \notin \mathfrak{m} \cdot A' =: M' \in \operatorname{Max} A'$. Wir wenden nun die obige Eigenschaft auf $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}'$ an und erhalten ein $\mathfrak{n}' \in \operatorname{Spec} B'$ mit $\mathfrak{n}' \cap A = \mathfrak{m}'$ sowie

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Quot}(A'/\mathfrak{m}') \arrow[r, hook, "\text{endl.}"] \arrow[d, equal, "\mathfrak{m}'\in\operatorname{Max}A'"'] & \operatorname{Quot}(B'/\mathfrak{n}') \arrow[d, equal] \\
A'/\mathfrak{m}' \arrow[d, equal] & \operatorname{Quot}(B/\mathfrak{n}) \arrow[d, equal] \\
A/\mathfrak{m} \arrow[r, hook] & B/\mathfrak{n},
\end{tikzcd}$$

wobei $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}' \cap B \in \operatorname{Spec} B$. Also ist $B/\mathfrak{n}$ ein Körper nach Lemma 6.7 und $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$. Es gilt $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{n}$ (da $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{q} \cap A$) und $b \notin \mathfrak{n}$, da wir die folgende Bijektion haben.

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Spec}((B/\mathfrak{q})[b^{-1}]) & \xleftrightarrow{1:1} & \{\tilde{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{q} \subseteq \tilde{\mathfrak{q}} \text{ und } b \notin \tilde{\mathfrak{q}}\} \\
\mathfrak{q}' & \mapsto & \mathfrak{q}' \cap B
\end{array}$$

[14. Juni 2018]

[18. Juni 2018]

ii) Nun zum Beweis des Zusatzes. Wähle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Max} B$ und $b = 1$. Wende die Konstruktion von eben an. Dann folgt, dass ein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ mit $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{q} \cap A$ und ein $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$ mit $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ sowie $\mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{q}$ existieren. Da $\mathfrak{q}$ maximal ist, ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}$. Also gilt $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$.

   Außerdem ist $\operatorname{Quot}(A'/\mathfrak{m}') \hookrightarrow \operatorname{Quot}(B'/\mathfrak{n}')$ eine endliche Körpererweiterung, aber es gilt $\operatorname{Quot}(A'/\mathfrak{m}') = A/\mathfrak{m} = A/\mathfrak{q}\cap A$ und $\operatorname{Quot}(B'/\mathfrak{n}') = B/\mathfrak{n} = B/\mathfrak{q}$. $\square$

Korollar 7.23. *Sei k ein Körper und A endlich erzeugte k-Algebra. Dann gilt:*

i) *A ist Jacobson.*

ii) *Für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ ist $k \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$ endlich.*

iii) $\operatorname{Max} A = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid k \hookrightarrow \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})$ *endlich*$\}$

iv) *Sei $f\colon A \to B$ ein Homomorphismus von endlich erzeugten k-Algebren sowie $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max} B$; dann ist $\mathfrak{n} \cap A \in \operatorname{Max} A$.*

Beweis.

i) Folgt direkt aus Satz 7.22 i).

ii) Folgt direkt aus Satz 7.22 ii).

iii) Die Inklusion von links nach rechts folgt aus ii); die andere Inklusion folgt daraus, dass $A/\mathfrak{p}$ ein Zwischenring zwischen k und $\operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})$ ist und damit schon ein Körper sein muss, weil die Erweiterung $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})$ endlich sein muss.

iv) Wende Satz 7.22 ii) auf die endlich erzeugte A-Algebra B an. $\square$

Korollar 7.24 (Schwacher Nullstellensatz)**.** *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Betrachte den Polynomring $k[t_1, \dots, t_n]$. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ definiere $\mathfrak{m}_x := (t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n)$. Dann ist $\mathfrak{m}_x \in \operatorname{Max} k[t_1, \dots, t_n]$ und die Abbildung*

$$k^n \longrightarrow \operatorname{Max} k[t_1, \dots, t_n], \quad x \longmapsto \mathfrak{m}_x$$

ist bijektiv.

Beweis. Sei $A := k[t_1, \dots, t_n]$. Es gilt $\mathfrak{m}_x \in \operatorname{Max} A$, da $A/\mathfrak{m}_x \cong k$ und $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$ für $x \neq y$. Es ist noch die Surjektivität zu zeigen. Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$. Nach Korollar 7.23 ist $k \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung. Da k algebraisch abgeschlossen ist, muss damit bereits $k \cong A/\mathfrak{m}$ gelten. Betrachte das Bild x_i von t_i unter der Abbildung $A \to A/\mathfrak{m} \cong k$. Dabei ist $t_i - x_i \in \ker(A \to A/\mathfrak{m} \cong k) = \mathfrak{m}$. Also gilt $\mathfrak{m}_x = (t_1 - x_1, \dots, t_n - x_n) \subseteq \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}_x$ maximal ist, muss schon $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}$ gelten. $\square$

8 Affine Varietäten

Im ganzen folgenden Kapitel sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 8.1.

i) Sei $n \geq 0$. $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(k) := k^n$ heißt *n-dimensionaler affiner Raum.*

ii) Sei $T \subseteq k[t_1, \dots, t_n]$ eine Teilmenge. Definiere

$$\mathrm{Z}(T) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in T : f(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

Eine Teilmenge der Form $\mathrm{Z}(T)$ heißt *algebraische Teilmenge* von $\mathbb{A}^n$.

Bemerkung 8.2.

i) Seien $T_1 \subseteq T_2 \subseteq k[t_1, \dots, t_n]$. Dann ist $\mathrm{Z}(T_1) \supseteq \mathrm{Z}(T_2)$.

ii) Sei $T \subseteq k[t_1, \dots, t_n]$ und $I := (T)$. Dann folgt $\mathrm{Z}(T) = \mathrm{Z}(I)$.

Beweis. Die Inklusion $\mathrm{Z}(T) \supseteq \mathrm{Z}(I)$ ist klar. Sei umgekehrt $x \in \mathrm{Z}(T)$ und $f \in I$. Dann gibt es Elemente $g_i \in k[t_1, \dots, t_n]$ und $h_i \in T$ mit $f = \sum g_i h_i$. Es folgt $f(x) = \sum g_i(x) h_i(x) = 0$. Da $k[t_1, \dots, t_n]$ nach Hilberts Basissatz noethersch ist, existieren schließlich $f_1, \dots, f_m \in I$ mit $\mathrm{Z}(T) = \mathrm{Z}(I) = \mathrm{Z}(\{f_1, \dots, f_m\})$. $\square$

Beispiel 8.3. Wir betrachten $\mathbb{A}^2$. Es gilt:

i) $\mathrm{Z}(t_1^2 + t_2^2 - 1) = \{(x_1, x_2) \in k^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

ii) $\mathrm{Z}(t_1 \cdot t_2) = \{(x_1, x_2) \in k^2 \mid x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0\}$

iii) $Z(t_1^2 \cdot t_2^2) = \{(x_1, x_2) \in k^2 \mid x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0\}$

iv) $Z(t_1 - x, t_2 - y) = \{(x, y)\}$

Beispiel 8.4. Betrachte $\mathbb{A}^1$. Was sind die algebraischen Teilmengen? Sei $I \subseteq k[t]$ ein Ideal. Falls $I = (0)$, dann ist $Z(I) = \mathbb{A}^1$. Sei also $I \neq 0$. Sei $f \in k[t]$ mit $I = (f)$. Dann ist $Z(I) = Z(f) = \{x \in k \mid f(x) = 0\}$. Da f etwa zu $f(t) = c(t - x_1) \dots (t - x_n)$ für gewisse $c \neq 0, x_i \in k$ faktorisiert, folgt $Z(f) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Damit erhalten wir

$$\{\text{Algebraische Teilmengen von } \mathbb{A}^1\} = \{\text{Endliche Teilmengen von } \mathbb{A}^1\} \cup \{\mathbb{A}^1\}.$$

Lemma 8.5. *Seien $I, J, I_\nu \subseteq k[t_1, \dots, t_n]$ mit $\nu \in V$ Ideale. Dann gilt*

$$Z\left(\sum_{\nu \in V} I_\nu\right) = \bigcap_{\nu \in V} Z(I_\nu) \tag{i}$$

und

$$Z(I \cdot J) = Z(I \cap J) = Z(I) \cup Z(J). \tag{ii}$$

Beweis.

(i) $Z(\sum I_\nu) \subseteq \bigcap Z(I_\nu)$ ist klar nach Bemerkung 8.2 i). Für die andere Inklusion sei $x \in \bigcap Z(I_\nu)$. Für $f \in \sum I_\nu$. Dann gibt es Elemente $f_\nu \in I_\nu$ (nur endlich viele ungleich 0) mit $f = \sum f_\nu$, woraus $f(x) = \sum f_\nu(x) = 0$, also $f \in Z(\sum I_\nu)$ folgt.

(ii) Nach Bemerkung 8.2 i) ist $Z(I \cdot J) \supseteq Z(I \cap J) \supseteq Z(I) \cup Z(J)$. Sei $x \in Z(I \cdot J)$ und angenommen, $x \notin Z(I)$. Dann existiert ein $f \in I$ mit $f(x) \neq 0$. Sei $g \in J$. Dann ist $fg \in I \cdot J$, also $0 = f(x) \cdot g(x)$, wobei $f(x) \neq 0$, also $g(x) = 0$ und damit $x \in Z(J)$. □

Proposition 8.6. *Es ist*

$$\{\mathbb{A}^n \setminus Z(T) \mid T \subseteq k[t_1, \dots, t_n]\}$$

eine Topologie auf $\mathbb{A}^n$, genannt Zariski-Topologie.

Definition 8.7. Sei X ein topologischer Raum.

i) X heißt *irreduzibel*, falls für alle abgeschlossenen $Y_1, Y_2 \subsetneq X$ dann $Y_1 \cup Y_2 \neq X$ folgt.

ii) Sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Y heißt irreduzibel, wenn Y mit der Relativtopologie irreduzibel ist.

Beispiel 8.8. $\mathbb{A}^1$ ist irreduzibel, denn echte abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{A}^1$ sind endlich, aber $|\mathbb{A}^1| = |k| = \infty$.

Definition 8.9. Eine irreduzible algebraische Teilmenge $X \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt *affine Varietät*.
Achtung: Die abgeschlossene Einbettung $X \subseteq \mathbb{A}^n$ gehört zum Datum einer Varietät.

8.1 Hilberts Nullstellensatz

Definition 8.10. Sei $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ eine Teilmenge. Definiere

$$\mathrm{I}(Y) := \{f \in k[t_1, \ldots, t_n] \mid \forall x \in Y : f(x) = 0\}.$$

Bemerkung 8.11.

i) $\mathrm{I}(Y) \subseteq k[t_1, \ldots, t_n]$ ist ein Ideal.

ii) Aus $Y_1 \subseteq Y_2$ folgt $\mathrm{I}(Y_1) \supseteq \mathrm{I}(Y_2)$.

iii) $\mathrm{I}(Y_1 \cup Y_2) = \mathrm{I}(Y_1) \cap \mathrm{I}(Y_2)$

Beispiel. Betrachte $\mathbb{A}^2 \supseteq Y = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0\} = \mathrm{Z}(t_1 \cdot t_2) = \mathrm{Z}(t_1^i t_2^j)$ für $i, j > 0$. Was ist dann $\mathrm{I}(Y)$?

Sei $f \in \mathrm{I}(Y) \subseteq k[t_1, t_2]$, schreibe $f(t_1, t_2) = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} t_1^i t_2^j$. Es gilt für alle $x \in k$ nun $0 = f(x, 0) = \sum_{i \geq 0} a_{i0} x^i$ und $0 = f(0, x) = \sum_{j \geq 0} a_{0j} x^j$. Da $|k| = \infty$ ist, folgt $f(0, t_2) = f(t_1, 0) = 0$. Damit erhalten wir

$$f(t_1, t_2) = \sum_{i,j > 0} a_{ij} t_1^i t_2^j \in (t_1 \cdot t_2).$$

Andererseits folgt aus $t_1 \cdot t_2 \in \mathrm{I}(Y)$ dann $(t_1 \cdot t_2) \subseteq \mathrm{I}(Y)$; und es gilt $\mathrm{I}(Y) = (t_1 \cdot t_2)$.

Lemma 8.12. *Sei $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ eine Teilmenge. Dann ist $\mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y)) = \overline{Y}$ (Abschluss in $\mathbb{A}^n$).*

Beweis.

„$\supseteq$“: Es gilt $Y \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y))$, da für $x \in Y$ und $f \in \mathrm{I}(Y)$ dann $f(x) = 0$ folgt. Zusammen mit der Abgeschlossenheit von $\mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y))$ folgt $\overline{Y} \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y))$.

„$\subseteq$“: Da $\overline{Y}$ abgeschlossen ist, existiert ein Ideal $\overline{I} \subseteq k[t_1, \ldots, t_n]$ mit $\mathrm{Z}(\overline{I}) = \overline{Y}$. Da $Y \subseteq \overline{Y} = \mathrm{Z}(\overline{I})$, gilt für alle $x \in Y$ und alle $f \in \overline{I}$ dann $f(x) = 0$. Deshalb ist $\overline{I} \subseteq \mathrm{I}(Y)$ und es folgt $\overline{Y} = \mathrm{Z}(\overline{I}) \supseteq \mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y))$. □

Satz 8.13 (Hilberts Nullstellensatz)**.** *Sei $I \subseteq k[t_1, \ldots, t_n]$ ein Ideal. Dann gilt*

$$\mathrm{I}(\mathrm{Z}(I)) = \sqrt{I}.$$

[14. Juni 2018]

[21. Juni 2018]

Beweis. Nach Definition gilt $\mathrm{Z}(I) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid \forall f \in I : f(x) = 0\}$. Dabei ist $f(x) = 0$ genau dann, wenn $f \in \ker(\mathrm{ev}_x \colon k[t_1, \ldots, t_n] \to k) =: \mathfrak{m}_x$ gilt. Also können wir auch

$$\mathrm{Z}(I) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid I \subseteq \mathfrak{m}_x\}$$

schreiben. Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(\mathrm{Z}(I)) &= \{f \in k[t_1, \dots, t_n] \mid \forall x \in \mathrm{Z}(I) : f(x) = 0\} \\
&= \{f \in k[t_1, \dots, t_n] \mid \forall x \in \mathbb{A}^n : I \subseteq \mathfrak{m}_x \Rightarrow f \in \mathfrak{m}_x\} \\
&= \bigcap_{\substack{x \in \mathbb{A}^n, \\ I \subseteq \mathfrak{m}_x}} \mathfrak{m}_x.
\end{aligned}$$

Nach dem SCHWACHEN NULLSTELLENSATZ gilt dabei weiter

$$= \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} k[t_1,\dots,t_n], \\ I \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{m}$$

Da $k[t_1, \dots, t_n]$ Jacobson ist, folgt ferner

$$= \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[t_1,\dots,t_n], \\ I \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} = \sqrt{I}.$$

□

Bemerkung. Sei $I \subsetneq k[t_1, \dots, t_n]$. Dann gilt $\mathrm{Z}(I) \neq \emptyset$.

Beweis. Wir haben $\sqrt{I} \subsetneq k[t_1, \dots, t_n]$, also existiert ein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} k[t_1, \dots, t_n]$ mit $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{m}$. Weiter existiert ein $x \in \mathbb{A}^n$ mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$, wobei wir hierbei nur den SCHWACHEN NULLSTELLENSATZ verwenden. Daraus folgt

$$\{x\} = \mathrm{Z}(\mathfrak{m}_x) \subseteq \mathrm{Z}(\sqrt{I}) \subseteq \mathrm{Z}(I),$$

wobei im letzten Schritt schon Gleichheit gilt, denn für $y \in \mathrm{Z}(I)$ und $f \in \sqrt{I}$ existiert ein $n > 0$ mit $f^n \in I$, und es folgt $0 = f^n(y) = f(y)^n$, also $f(y) = 0$. □

Korollar 8.14.

i) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}
\{\textit{Algebraische Teilmengen } Y \subseteq \mathbb{A}^n\} &\xleftrightarrow{1:1} \{I \subseteq k[t_1, \dots, t_n] \mid I \textit{ Ideal}, I = \sqrt{I}\} \\
Y &\longmapsto \mathrm{I}(Y) \\
\mathrm{Z}(I) &\longleftarrow\!\shortmid\ I
\end{aligned}$$

ist eine inklusionsumkehrende („inclusion reversing“) Bijektion.

ii) *Die Bjektion beschränkt sich sich zu*

$$\{\textit{Abgeschlossene irreduzible Teilmengen } Y \subseteq \mathrm{A}^n\} \xleftrightarrow{1:1} \operatorname{Spec} k[t_1, \dots, t_n]$$

bzw. zu

$$\{\{x\} \mid x \in \mathbb{A}^n\} \xleftrightarrow{1:1} \operatorname{Max} k[t_1, \dots, t_n].$$

Beweis.

i) Klar nach Hilberts Nullstellensatz und Lemma 8.12.

ii) Sei $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge. Seien $f, g \in k[t_1, \ldots, t_n]$ mit $f, g \notin \mathrm{I}(Y)$ und $f \cdot g \in \mathrm{I}(Y)$. Dann folgt $\mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y) + (f)) \supsetneq Y \subsetneq \mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y) + (g))$, da aus $\mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y) + (f)) = Y$ dann $f(y) = 0$ für alle $y \in Y$, also $f \in \mathrm{I}(Y)$ gelten würde. Aufgrund der Irreduzibilität von Y folgt weiter

$$\mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y) + (f)) \cup \mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y) + (g)) \subsetneq Y,$$

wobei $\mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y)+(f)) \cup \mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y)+(g)) = \mathrm{Z}((\mathrm{I}(Y)+(f)) \cdot (\mathrm{I}(Y)+(g)))$ ist. Andererseits gilt

$$(\mathrm{I}(Y) + (f)) \cdot (\mathrm{I}(Y) + f(g)) \subseteq \mathrm{I}(Y) + (fg) = \mathrm{I}(Y)$$

nach Annahme. Das heißt, dass $Y \supsetneq \mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y)+(f)) \cup \mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y)+(g)) \supseteq \mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y)+(fg)) = \mathrm{Z}(\mathrm{I}(Y)) = Y$, was ein Widerspruch ist. Also ist $\mathrm{I}(Y)$ prim.

Für die umgekehrte Richtung sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[t_1, \ldots, t_n]$. Seien $Z_1, Z_2 \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{p})$ abgeschlossen mit $Z_1 \cup Z_2 = \mathrm{Z}(\mathfrak{p})$. Schreibe $Z_i = \mathrm{Z}(I_i)$ $(i = 1, 2)$ für Ideale $I_i \subseteq k[t_1, \ldots, t_n]$ mit $\mathfrak{p} \subseteq I_i$. Dann gilt

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{p}) = \mathrm{Z}(I_1) \cap \mathrm{Z}(I_2) = \mathrm{Z}(I_1 \cdot I_2).$$

Wir wenden i) an und erhalten $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}} = \sqrt{I_1 \cdot I_2} \supseteq I_1 \cdot I_2$ und mit Aufgabe 3 von Übungsblatt 7 („prime avoidance“) folgt $\mathfrak{p} \supseteq I_1$ oder $\mathfrak{p} \supseteq I_2$. Dann ist aber $\mathrm{Z}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathrm{Z}(I_1)$ oder $\mathrm{Z}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathrm{Z}(I_2)$, wobei jedes Mal bereits Gleichheit gälte. Damit ist $\mathrm{Z}(\mathfrak{p})$ irreduzibel.

Zu den maximalen Idealen: Für $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} k[t_1, \ldots, t_n]$ ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ für ein $x \in \mathbb{A}^n$. Es gilt $\mathrm{Z}(\mathfrak{m}_x) = \{x\}$, da für $y \in \mathrm{Z}(\mathfrak{m}_x)$ dann $f(y) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{m}_x$, also insbesondere $f(y) = 0$ für $f = t_i - x_i$ gilt, und demnach $y_i = x_i$, also $y = x$ folgt. Andersherum ist für $x \in \mathbb{A}^n$ dann $\mathrm{I}(\{x\}) = \{f \in k[t_1, \ldots, t_n] \mid f(x) = 0\} = \mathfrak{m}_x$. □

Definition 8.15. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Teilmenge. Der Ring

$$\mathrm{A}(X) := {}^{k[t_1,\ldots,t_n]}\!/_{\mathrm{I}(X)}$$

heißt *affiner Koordinatenring* von X.

Bemerkung 8.16. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Teilmenge.

i) $\mathrm{A}(X)$ ist *reduziert*, für alle $f \in \mathrm{A}(X)$ bedeutet die Existenz eines $n \geq 0$ mit $f^n = 0$ also bereits $f = 0$.

   $\mathrm{A}(X)$ ist eine endlich erzeugte k-Algebra.

ii) X ist genau dann irreduzibel, wenn $\mathrm{A}(X)$ ein Integritätsbereich ist.

Definition 8.17. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Teilmenge. Versieh X mit der Relativtopologie von $\mathbb{A}^n$. Diese Topologie auf X heißt die *Zariski-Topologie*.

Korollar 8.18. *Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Teilmenge. Dann induzieren* Z *und* I *aus Korollar 8.14 die folgenden Bijektionen.*

$$\begin{aligned}
\{\textit{Abgeschlossene Teilmengen } Y \subseteq X\} &\xleftrightarrow{1:1} \{I \subseteq \mathrm{A}(X) \textit{ Ideal} \mid \sqrt{I} = I\} \\
\{\textit{Abgeschlossene irreduzible Teilmengen } Y \subseteq X\} &\xleftrightarrow{1:1} \operatorname{Spec} \mathrm{A}(X) \\
\{\{x\} \mid x \in X\} &\xleftrightarrow{1:1} \operatorname{Max} \mathrm{A}(X)
\end{aligned}$$

Definition 8.19. Sei X ein topologischer Raum. Eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge $C \subseteq X$ heißt *irreduzible Komponente* von X, wenn für alle abgeschlossenen, irreduziblen $Z \subseteq X$ aus $C \subseteq Z$ bereits $C = Z$ folgt.

Korollar 8.20. *Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Teilmenge Dann liefern* Z *und* I *die Bijektion*

$$\{\textit{Irreduzible Komponenten } C \subseteq X\} \xleftrightarrow{1:1} \operatorname{MinSpec} \mathrm{A}(X).$$

Insbesondere hat X nur endlich viele irreduzible Komponenten (da $\mathrm{A}(X)$ *noethersch), aber mindestens eine.*

Beispiel. Betrachte $X = \mathrm{Z}(t_1 t_2) \subseteq \mathbb{A}^2$. Dann gilt

$$\mathrm{A}(X) = {}^{k[t_1,t_2]}/_{(t_1 t_2)} \quad \text{und} \quad \operatorname{MinSpec} \mathrm{A}(X) = \{(t_1), (t_2)\}.$$

Damit folgt

$$\{\text{Irreduzible Komponenten}\} = \{\mathrm{Z}(t_1) = t_2\text{-Achse},\ \mathrm{Z}(t_2) = t_1\text{-Achse}\}.$$

8.2 Morphismen

Definition 8.21. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ algebraische Teilmengen. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Morphismus von algebraischen Teilmengen*, falls es $f_1, \ldots, f_m \in k[t_1, \ldots, t_n]$ gibt, sodass

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ gilt. Wir erhalten also das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{A}^n & \xrightarrow{\exists (f_1, \ldots, f_m)} & \mathbb{A}^m \\
\cup\!\! \mid & & \cup\!\! \mid \\
X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y
\end{array}$$

Wir schreiben $\operatorname{Hom}(X, Y) := \{f\colon X \to Y \mid f \text{ Morphismus}\}$.

Beispiel 8.22.

i) Sei $X = \mathrm{Z}(t_1^3 - t_2^2) \subseteq \mathbb{A}^2$

   Betrachte Abbildung $f\colon \mathbb{A}^1 \to X, x \mapsto (x^2, x^3)$. f ist ein Morphismus, da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{(x^2,x^3)} & \mathbb{A}^2 \\ \cup\!\text{I} & & \cup\!\text{I} \\ \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

gilt. f ist bijektiv.

ii) Sei $Y = \mathrm{Z}(t_1^2 - t_2) \subseteq \mathbb{A}^2$.

Betrachte Abbildungen $g\colon \mathbb{A}^1 \to Y, x \mapsto (x, x^2)$ und $g'\colon Y \to \mathbb{A}^1, (x_1, x_2) \mapsto x_1$. Beides sind Morphismen (klar) und $g' \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{A}^1}$, $g \circ g' = \mathrm{id}_Y$.

Bemerkung 8.23. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ algebraische Teilmenge. Dann ist

$$\mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1) \subseteq \mathrm{Abb}(X, k) := \{f\colon X \to k \mid f \text{ Abbildung}\}$$

ein Unterring, wobei die Ringstruktur durch $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ gegeben ist. Falls $f, g \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1)$, sind dann auch $f+g, f \cdot g \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1)$.

Betrachte den Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \alpha\colon k[t_1, \dots, t_n] &\longrightarrow \mathrm{Abb}(X, k), \\ f &\longmapsto \alpha(f)\colon X \to k, x \mapsto f(x). \end{aligned}$$

Es gilt $\operatorname{im} \alpha = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1)$ und $\ker \alpha = \mathrm{I}(X)$. Somit induziert α einen Isomorphismus β.

$$\begin{array}{ccc} k[t_1, \dots, t_n] & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Abb}(X, k) \\ \big\downarrow & & \cup\!\text{I} \\ \mathrm{A}(X) & \xrightarrow[\cong]{\beta} & \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1) \end{array}$$

Für $f \in \mathrm{A}(X)$ schreiben wir $f(x) := (\beta(f))(x)$ für $x \in X$.

Bemerkung 8.24. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m, Z \subseteq \mathbb{A}^l$ algebraische Teilmengen, Seien $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Morphismen. Dann ist $g \circ f\colon X \to Z$ ein Morphismus. Außerdem: $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ ist ein Morphismus.

Definition 8.25. Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ zwischen algebraischen Teilmengen $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$ heißt *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt.

In der nächsten Vorlesung betrachten wir $\mathrm{Hom}(X, Y) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Alg.}}(\mathrm{A}(Y), \mathrm{A}(X))$. Es bleibt also spannend, bleibt dran!

[21. Juni 2018]

[25. Juni 2018]

Bemerkung. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Teilmenge sowie $A := \mathrm{A}(X)$. Wir haben zum einen die Zariski-Topologie auf X

$$\{\text{abgeschlossene Teilmengen von } X\} = \{\mathrm{Z}(J) \mid \mathrm{I}(X) \subseteq J \subseteq k[t_1, \dots, t_n]\}$$

und die Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} A$

$$\{\text{abgeschlossene Teilmengen von } \operatorname{Spec} A\} = \{\mathrm{V}(I) \mid I \subseteq A \text{ Ideal}\}$$

wobei $\mathrm{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Betrachte die bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi \colon X &\longrightarrow \operatorname{Max} A \subseteq \operatorname{Spec} A, \\ x &\longmapsto {}^{\mathfrak{m}_x}/_{\mathrm{I}(X)}. \end{aligned}$$

Betrachte die algebraische Teilmenge $\mathrm{Z}(J) \subseteq X$. Dann ist

$$\varphi(\mathrm{Z}(J)) = \{{}^{\mathfrak{m}_x}/_{\mathrm{I}(X)} \mid \forall f \in J : f(x) = 0\},$$

wobei $\forall f \in J : f(x) = 0$ äquivalent zu $J \subseteq \mathfrak{m}_x$ ist. Mit dem schwachen Nullstellensatz folgt

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{Z}(J)) &= \{{}^{\mathfrak{m}}/_{\mathrm{I}(X)} \mid J \subseteq \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} k[t_1, \dots, t_n]\} \\ &= \{\mathfrak{n} \mid \mathfrak{n} \in \operatorname{Max} A, \mathfrak{n} \supseteq {}^{J}/_{\mathrm{I}(X)}\} \\ &= \mathrm{V}({}^{J}/_{\mathrm{I}(X)}) \cap \operatorname{Max} A. \end{aligned}$$

Also ist die auf $\operatorname{Max} A$ von X via φ gegebene Topologie identisch zur Relativtopologie von $\operatorname{Spec} A$ auf $\operatorname{Max} A$.

Erinnerung: Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ abgeschlossen. Wir hatten dann:

$$\begin{tikzcd} k[t_1, \dots, t_n] \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d] & \mathrm{Abb}(X, k) \arrow[d, phantom, "\cup\!\mid"] \\ \mathrm{A}(X) \arrow[r, "\beta_X", "\cong"'] & \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1) \end{tikzcd}$$

Bemerkung 8.26.

i) Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ algebraische Teilmengen. Sei $f \colon X \to Y$ ein Morphismus. Definiere $f^* \colon \mathrm{A}(Y) \to \mathrm{A}(X)$ durch

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A}(Y) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[rrr, bend right, "f^*"'] & \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{A}^1) \arrow[r, "h \mapsto h \circ f"] & \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1) \arrow[r, "\beta_X^{-1}"] & \mathrm{A}(X). \end{tikzcd}$$

f^* ist ein Ringhomomorphismus, da $h \mapsto h \circ f$ ein Ringhomomorphismus (und sogar ein k-Algebrenhomomorphismus) ist. Für einen weiteren Morphismus $g : Y \to Z$ gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

ii) Sei $\varphi\colon \mathrm{A}(Y) \to \mathrm{A}(X)$ ein k-Algebrenhomomorphismus. Dann gilt

$$\begin{tikzcd} k[s_1,\dots,s_m] \arrow[r, dashed, "\exists\Phi"] \arrow[d, two heads] & k[t_1,\dots,t_n] \arrow[d, two heads] \\ \mathrm{A}(Y) \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{A}(X), \end{tikzcd}$$

wobei Φ ein k-Algebrenhomomorphismus ist. Dazu betrachten wir das Bild $\overline{f_i}$ von s_i unter der Abbildung $k[s_1,\dots,s_m] \twoheadrightarrow \mathrm{A}(Y) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{A}(X)$ und wählen ein Urbild f_i von $\overline{f_i}$ unter $k[t_1,\dots,t_n] \twoheadrightarrow \mathrm{A}(X)$. Setze nun $\Phi := \mathrm{ev}_{(f_1,\dots,f_m)}$ (nicht eindeutig bestimmt!).

Betrachte $F\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m, x = (x_1,\dots,x_n) \mapsto (f_1(x),\dots,f_m(x))$. Wir zeigen $F(X) \subseteq Y$. Sei $x \in X$ und $g \in \mathrm{I}(Y)$. Es gilt

$$g(F(x)) = g(f_1(x),\dots,f_m(x)) \overset{!}{=} g(f_1,\dots,f_m)(x),$$

da

$$\begin{tikzcd} k[s_1,\dots,s_m] \arrow[r, "\mathrm{ev}_{(f_1,\dots,f_m)}"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_{(f_1(x),\dots,f_m(x))}"'] & k[t_1,\dots,t_n] \arrow[d, "\mathrm{ev}_{(x_1,\dots,x_n)}"] \\ & k \end{tikzcd}$$

kommutiert und folglich

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_{(x_1,\dots,x_n)} \circ \mathrm{ev}_{(f_1,\dots,f_m)}(s_i) &= \mathrm{ev}_{(x_1,\dots,x_n)}(f_i) = f_i(x_1,\dots,x_n) \\ &= f_i(x) = \mathrm{ev}_{(f_1(x),\dots,f_m(x))}(s_i) \end{aligned}$$

gilt. Also haben wir $g(F(x)) = (g(f_1,\dots,f_m))(x)$, wobei

$$g(f_1,\dots,f_m) = \mathrm{ev}_{(f_1,\dots,f_m)}(g) = \Phi(g)$$

ist, also $g(F(x)) = (\Phi(g))(x) = 0$, da $\Phi(\mathrm{I}(Y)) \subseteq \mathrm{I}(X)$. Das bedeutet nun:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^m \\ X \arrow[u, phantom, "\cup\!\mathsf{I}"] \arrow[r, dashed, "\exists! f"] & Y \arrow[u, phantom, "\cup\!\mathsf{I}"] \end{tikzcd}$$

Nach Konstruktion von F ist f ein Morphismus

Wir zeigen noch, dass f unabhängig von den Wahlen der f_i ist. Seien dazu f_i' weitere Urbilder von $\overline{f_i}$. Dann gilt insbesondere $f_i - f_i' \in \mathrm{I}(X)$. Nun folgt $f_i(x) = f_i'(x)$ für alle $x \in X$, also $F(x) = F'(x) := (f_1'(x),\dots,f_m'(x))$.

Wir schreiben $\varphi^\# := f$. Für k-Algebrenhomomorphismen $\psi\colon \mathrm{A}(Z) \to \mathrm{A}(Y)$ gilt weiterhin $(\varphi \circ \psi)^\# = \psi^\# \circ \varphi^\#$.

Proposition 8.27.

i) *Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$ algebraische Teilmengen. Dann sind*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(X,Y) & \longleftrightarrow & \mathrm{Hom}_{k-Alg.}(\mathrm{A}(Y),\mathrm{A}(X)) \\ f & \longmapsto & f^* \\ \varphi^\# & \longleftarrow\!\shortmid & \varphi \end{array}$$

zueinander inverse Bijektionen.

ii) *Zu jeder endlich erzeugten, reduzierten k-Algebra A existiert eine algebraische Teilmenge $X \subseteq \mathbb{A}^n$ mit $\mathrm{A}(X) \cong A$. X ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und A genau dann ein Integritätsbereich, wenn X eine Varietät ist.*

Beweis.

i) Sei $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Wir zeigen zunächst $(f^*)^\# = f$. Definiere $\varphi := f^*$. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[s_1,\dots,s_m] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & k[t_1,\dots,t_n] \arrow[d] \\ \mathrm{A}(Y) \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{A}(X), \end{tikzcd} \tag{*}$$

wobei wir Φ so wählen, dass (*) kommutiert.

Sei $F\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ die Abbildung konstruiert wie in Bemerkung 8.26 ii). Es gilt $\varphi^\#(x) = F(x)$ für alle $x \in X$. Wir wenden das β aus Bemerkung 8.23 auf das Diagramm (*) an und erhalten

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathbb{A}^m,\mathbb{A}^1) \arrow[rrr, "h\mapsto h\circ F"'] \arrow[ddd, "h\mapsto h|_Y"] & & & \mathrm{Hom}(\mathbb{A}^n,\mathbb{A}^1) \arrow[ddd, "h\mapsto h|_X"'] \\ & k[s_1,\dots,s_m] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] \arrow[ul, "\cong"'] & k[t_1,\dots,t_n] \arrow[d] \arrow[ur, "\cong"] & \\ & \mathrm{A}(Y) \arrow[r, "\varphi=f^*"] \arrow[dl, "\cong"] & \mathrm{A}(X) \arrow[dr, "\cong"'] & \\ \mathrm{Hom}(Y,\mathbb{A}^1) \arrow[rrr, "h\mapsto h\circ f"] & & & \mathrm{Hom}(X,\mathbb{A}^1). \end{tikzcd}$$

Hierin kommutieren alle Teildiagramme, also insbesondere auch der äußere Weg, was gerade

$$(h \circ F)|_X = h|_Y \circ f \quad \text{und} \quad h(F(x)) = h(f(x))$$

für alle $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{A}^m,\mathbb{A}^1)$ und $x \in X$ bedeutet.

Wir wählen nun konkret $h\colon \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^1, (y_1,\dots,y_m) \mapsto y_i$. Dann ist $F(x)_i$ die i-te Koordinate von $F(x) = f(x)_i$. Da i beliebig ist, gilt schon $F(x) = f(x)$.

Sei umgekehrt $\varphi\colon \mathrm{A}(Y) \to \mathrm{A}(X)$ ein Homomorphismus von k-Algebren. Wir wählen einen Lift, sodass das Diagramm (*) kommutiert, und erhalten so $F\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$. Es gilt $\varphi^\#(x) = F(x)$ für alle $x \in X$. Es reicht zu zeigen, dass

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(Y,\mathbb{A}^1) \arrow[r, "h\mapsto h\circ\varphi^\#"] & \mathrm{Hom}(X,\mathbb{A}^1) \\ \mathrm{A}(Y) \arrow[u, "\cong"', "\beta_Y"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{A}(X) \arrow[u, "\cong"', "\beta_X"] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Seien dazu $g \in \mathrm{A}(Y)$ und $x \in X$; und wir zeigen $(\beta_Y(g) \circ \varphi^\#)(x) = (\beta_X(\varphi(g)))(x)$. Zunächst gilt

$$(\beta_Y(g) \circ \varphi^\#)(x) = (\beta_Y(g))(\varphi^\#(x)),$$

und wir wählen ein Urbild $\overline{g}$ unter $k[s_1,\dots,s_m] \to \mathrm{A}(Y)$. Weiter erhalten wir

$$= \overline{g}(\varphi^\#(x)) = \overline{g}(F(x)) = (\Phi(\overline{g}))(x),$$

und wählen wieder ein Urbild $\overline{\varphi(g)}$ von $\varphi(g)$ unter $k[t_1,\dots,t_n]$. Schließlich gilt

$$= (\overline{\varphi(g)})(x) = (\beta_Y(\varphi(g)))(x).$$

ii) Sei A eine reduzierte, endlich erzeugte k-Algebra; es existiert also eine Surjektion $\varphi\colon k[t_1,\dots,t_n] \to A$ von k-Algebren. Definiere $X := \mathrm{Z}(\ker\varphi) \subseteq \mathbb{A}^n$ (algebraisch). Dann gilt

$$\mathrm{A}(X) = k[t_1,\dots,t_n]/\mathrm{I}(X) = k[t_1,\dots,t_n]/\sqrt{\ker\varphi}.$$

Da A reduziert ist, folgt $k[t_1,\dots,t_n]/\sqrt{\ker\varphi} = k[t_1,\dots,t_n]/\ker\varphi \cong A$. $\square$

Lemma 8.28. *Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ algebraische Teilmengen sowie $f\colon X \to Y$ ein Morphismus. Sei $x \in X$ und $\mathfrak{m}_x \in \operatorname{Max}\mathrm{A}(X)$ das zugehörige maximale Ideal. Dann ist $\mathfrak{m}_x \cap \mathrm{A}(Y) = \mathfrak{m}_{f(x)}$ (via $f^*\colon \mathrm{A}(Y) \to \mathrm{A}(X)$).*

Beweis. Unter $\beta_X\colon \mathrm{A}(X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(X,\mathbb{A}^1)$ ist $\beta_X(\mathfrak{m}_x) = \{h \in \mathrm{Hom}(X,\mathbb{A}^1) \mid h(x) = 0\}$. Betrachte das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A}(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\cong"', "\beta_Y"] & \mathrm{A}(X) \arrow[d, "\cong"', "\beta_X"] \\ \mathrm{Hom}(Y,\mathbb{A}^1) \arrow[r, "\Phi", "h\mapsto h\circ f"'] & \mathrm{Hom}(X,\mathbb{A}^1) \end{tikzcd}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\beta_X(\mathfrak{m}_x)) &= \{h \in \mathrm{Hom}(Y,\mathbb{A}^1 \mid h \circ f \in \beta_X(\mathfrak{m}_x)\} \\ &= \{h \in \mathrm{Hom}(Y,\mathbb{A}^1) \mid h(f(x)) = 0\} = \beta_Y(\mathfrak{m}_{f(x)}). \end{aligned}$$ $\square$

[25. Juni 2018]

[28. Juni 2018]

Definition 8.29. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Teilmenge und $h \in \mathrm{A}(X)$. Dann heißt

$$\mathrm{D}(h) := \{x \in X \mid h(x) \neq 0\} = X \setminus \mathrm{Z}(h)$$

die *offene Hauptmenge* von X („principal open subset").

Bemerkung 8.30. Offene Hauptmengen lassen sich als algebraische Teilmengen realisieren. Für $X \subseteq \mathbb{A}^n$ ist $\mathrm{D}(h) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ abgeschlossen. Es gilt $\mathrm{A}(\mathrm{D}(h)) \cong \mathrm{A}(X)[h^{-1}]$.

Lemma 8.31. *Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Teilmenge und $U \subseteq X$ offen. Dann gibt es $h_1, \ldots, h_m \in \mathrm{A}(X)$ mit*

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{D}(h_1).$$

Beweis. Sei $Z = X \setminus U \subseteq X$ abgeschlossen. Dann gibt es ein Ideal $I \subseteq \mathrm{A}(X)$, sodass $Z = \mathrm{Z}(I) = \{x \in X \mid \forall f \in I, f(x) = 0\}$. Da $\mathrm{A}(X)$ noethersch ist, gibt es $h_1, \ldots, h_m \in I$ mit $I = (h_1, \ldots, h_m)$. Dann ist

$$Z = \{x \in X \mid h_1(x) = \ldots = h_m(x) = 0\}$$

und

$$U = X \setminus Z = \{x \in X \mid \exists i : h_i(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{D}(h_m). \qquad \square$$

Proposition 8.32. *Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ algebraische Teilmengen sowie $f\colon X \to Y$ ein Morphismus. Dann ist f stetig.*

Beweis. Nach Lemma 8.31 genügt es zu zeigen, dass $f^{-1}(\mathrm{D}(h)) \subseteq X$ für alle $h \in \mathrm{A}(Y)$ offen ist. Es gilt aber $f^{-1}(\mathrm{D}(h)) = \{x \in X \mid h(f(x)) \neq 0\} = \{x \in X \mid (f^*(h))(x) \neq 0\} = \mathrm{D}(f^*(h))$. $\square$

Bemerkung 8.33. Seien $X = \mathrm{Z}(t_1^3 - t_2^2) = \{(x_1, x_2) \mid x_1^3 = x_2^2\} \subseteq \mathbb{A}^2$ und $Y = \mathbb{A}^1$. Dann ist $f\colon \mathbb{A}^1 \to X, x \mapsto (x^2, x^3)$ ein Morphismus und offensichtlich bijektiv. Wir zeigen, dass f offen (d.h. Bilder offener Teilmengen sind offen) ist. Sei dazu $h \in \mathrm{A}(\mathbb{A}^1) = k[t]$. Wir betrachten $\mathrm{D}(h)$. Sei ohne Einschränkung $h(t) = (t - x_1) \ldots (t - x_n)$. Also ist $\mathrm{D}(h) = \mathbb{A}^1 \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Damit haben wir $f(\mathrm{D}(h)) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{D}(h)\} = X \setminus \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$, wobei wir hier ausnutzen, dass f bijektiv ist. Da aber endliche Teilmengen sind abgeschlossen sind, ist $f(\mathrm{D}(h))$ offen. Folglich ist f ein Homöomorphismus.

Aber: f ist kein Isomorphismus. Betrachte $f^*\colon \mathrm{A}(X) \to \mathrm{A}(\mathbb{A}^1)$, wobei $\mathrm{A}(\mathbb{A}^1) = k[t]$ und $\mathrm{A}(X) = k[t_1, t_2]/(t_1^3 - t_2^2)$, da $t_1^3 - t_2^2$ irreduzibel ist.

$$f^*\colon k[t_1, t_2]/(t_1^3 - t_2^2) \longrightarrow k[t], \quad t_1 \longmapsto t^2, t_2 \longmapsto t^3$$

f^* ist kein Isomorphismus, da $t \notin \operatorname{im} f^*$. Nach Proposition 8.27 ist damit auch f kein Isomorphismus.

Außerdem sind $\mathbb{A}^1$ und X sind nicht isomorph. Betrachte $(0,0)$ in X. Dieser Punkt entspricht dem maximalen Ideal $(t_1,t_2)/(t_1^3-t_2^2) =: \mathfrak{m}$ von $\mathrm{A}(X)$. Es gilt

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong (t_1,t_2)/(t_1^2,t_1t_2,t_2^2,t_1^2-t_2^2) = \langle t_1,t_2\rangle_k$$

und t_1,t_2 in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sind linear unabhängig.

Aber für $x \in \mathbb{A}^1$ gilt $\mathfrak{m}_x = (t-x)$, und es folgt $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \cong \langle t-x\rangle_k$. Somit kann es keinen Isomorpismus $\mathbb{A}^1 \to X$ geben.

9 Dimensionstheorie

Definition 9.1. Sei X ein topologischer Raum. Definiere $\dim X \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\pm\infty\}$ als

$$\dim X := \sup\{l \mid \exists X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_l \neq \emptyset,\ \ X_i \subseteq X \text{ abgeschlossen und irreduzibel}\}.$$

Formal gilt $\dim\emptyset = -\infty$.

Falls $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Teilmenge, also insbesondere eine Varietät ist, so haben wir die Bijektion

$$\{\text{abgeschlossene irreduzible Teilmenge } Z \subseteq X\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{Primideale von } \mathrm{A}(X)\}$$

Dies führt zu der folgenden

Definition 9.2. Sei A ein Ring. Definiere $\dim A \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\pm\infty\}$ als

$$\dim A := \sup\{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l,\ \ \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A\}$$

Formal gilt $\dim 0 = -\infty$.

Beispiel 9.3.

i) Körper haben Dimension 0.

ii) Sei A ein Hauptidealring, der kein Körper ist. Dann folgt $\dim A = 1$. Beispielsweise ist $\dim\mathbb{Z} = 1$ oder $\dim k[t] = 1$ (geometrisch $\dim\mathbb{A}^1 = 1$).

iii) In $k[t_1,\dots,t_n]$ können wir die Primidealkette

$$(0) \subsetneq (t_1) \subsetneq \cdots \subsetneq (t_1,\dots,t_n)$$

betrachten. Deshalb folgt $\dim k[t_1,\dots,t_n] \geq n$, also $\dim\mathbb{A}^n \geq n$. Tatsächlich gilt Gleichheit, wie wir später sehen werden.

Bemerkung 9.4. Sei A ein Ring mit $\dim A = d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann existiert eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d$ in A. Dann ist diese Kette maximal, das heißt, es gibt kein $\mathfrak{p}$ in $\operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_0$ oder $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$ und $\mathfrak{p}_d \subsetneq \mathfrak{p}$. Insbesondere gilt also:

i) $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{MinSpec} A \Rightarrow \dim A = \max_{\mathfrak{p} \in \operatorname{MinSpec} A} \dim A/\mathfrak{p}$

ii) $\mathfrak{p}_d \in \operatorname{Max} A \Rightarrow \dim A = \max_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A} A_\mathfrak{m}$

Bemerkung 9.5. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Teilmenge.

i) $\dim X = \max_{i=1,\dots,r} \dim C_i$, wobei $C_1, \dots, C_r$ die irreduziblen Komponenten sind.

ii) $\dim X = \max_{x \in X} \dim \mathrm{A}(X)_{\mathfrak{m}_x}$ (falls X irreduzibel, dann folgt $\dim \mathrm{A}(X)_{\mathfrak{m}_x} = \dim \mathrm{A}(X)$ für alle $x \in X$, was wir später zeigen werden).

Beispiel 9.6. Sei $X = \mathrm{Z}(t_1t_3, t_2t_3) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1x_3 = 0 \text{ und } x_2x_3 = 0\}$, also $x_3 = 0$ oder $x_1 = x_2 = 0$. Irreduzible Komponenten sind $C_1 = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in k\} \cong \mathbb{A}^2$, $C_2 = \{(0, 0, x_3) \mid x_3 \in k\} \cong \mathbb{A}^1$. Dann ist $\dim X = \dim C_1 = \dim \mathbb{A}^2 = 2$.

Proposition 9.7. *Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung. Dann gilt:*

i) $\dim A = \dim B$

ii) *Für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ ist $\dim A_{\mathfrak{q} \cap A} \geq \dim B_\mathfrak{q}$.*

iii) *Falls $A \subseteq B$ die Voraussetzungen von* Going down *erfüllt (also $\forall \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec} A, \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \forall \mathfrak{q}_2 \in \operatorname{Spec} B, \mathfrak{q}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2 \exists \mathfrak{q}_1 \in \operatorname{Spec} B : \mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$), so folgt bereits Gleichheit in ii); es gilt also $\dim A_{\mathfrak{q} \cap A} = \dim B_\mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$.*

Beweis.

i) $\dim A \geq \dim B$: Sei $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_l$ eine Primidealkette in B. Dann erhalten wir die Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \cap A \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_l \cap A$ von A. Nach Proposition 6.8 iii) sind die Inklusionen dabei alle tatsächlich echt.

$\dim A \leq \dim B$: Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d$ eine Primidealkette in A. Da $A \hookrightarrow B$ injektiv ist, folgt mit Proposition 6.8 ii), dass es $\mathfrak{q}_0 \in \operatorname{Spec} B$ gibt mit $\mathfrak{q}_0 \cap A = \mathfrak{p}_0$. Wir haben also folgende Situation:

$$\begin{array}{ccccccc} B & & \mathfrak{q}_0 & & & & \\ \cup\!| & & \big\downarrow & & & & \\ A & & \mathfrak{p}_0 & \subsetneq & \cdots & \subsetneq & \mathfrak{p}_d \end{array}$$

Mit Going up folgt, dass es $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_d$ gibt mit $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$.

ii) Sei $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_l = \mathfrak{q}$ eine Primidealkette in B. Nach Proposition 6.8 ii) gilt dann $\mathfrak{q}_0 \cap A \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_l \cap A = \mathfrak{q} \cap A$.

iii) Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l = \mathfrak{q} \cap A$. Wir haben also folgende Situation:

$$\begin{array}{ccccccc} B & & \mathfrak{q} & & & & \\ \cup\!| & & \big\downarrow & & & & \\ A & & \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}_l & \supsetneq & \cdots & \supsetneq & \mathfrak{p}_0 \end{array}$$

Nach Going down existieren dann passende Primideale in B. $\square$

9.1 Krulls Hauptidealsatz

Definition 9.8. Sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ sowie $n \geq 0$. Dann heißt

$$\mathfrak{p}^{(n)} := (\mathfrak{p}^n \cdot A_\mathfrak{p}) \cap A$$

die *n-te sympolische Potenz* von $\mathfrak{p}$.

Lemma 9.9. *Sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ sowie $n \geq 0$.*

i) $\mathfrak{p}^{(n)} = \{a \in A \mid \exists s \in A \setminus \mathfrak{p} : sa \in \mathfrak{p}^n\}$

ii) $\mathfrak{p}^{(0)} \supseteq \mathfrak{p}^{(1)} \supseteq \mathfrak{p}^{(2)} \supseteq \dots$, *wobei* $\mathfrak{p}^{(0)} = A$ *und* $\mathfrak{p}^{(1)} = \mathfrak{p}$

iii) $\mathfrak{p}^n \subseteq \mathfrak{p}^{(n)}$

iv) $\mathfrak{p}^{(n)} \cdot A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^n \cdot A_\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p})^n$

Beweis.

i) „$\supseteq$“: Sei $a \in A$, sodass ein $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $sa \in \mathfrak{p}^n$ existiert. Dann ist $\frac{a}{1} = \frac{sa}{s} \in \mathfrak{p}^n \cdot A_\mathfrak{p}$, also $a \in (\mathfrak{p}^n \cdot A_\mathfrak{p}) \cap A = \mathfrak{p}^{(n)}$.

„$\subseteq$“: Sei $a \in (\mathfrak{p}^n \cdot A_\mathfrak{p}) \cap A$. Dann ist $\frac{a}{1} \in \mathfrak{p}^n \cdot A_\mathfrak{p}$. Es gibt also $b \in \mathfrak{p}^n$ und $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $\frac{a}{1} = \frac{b}{t}$. Somit existiert ein $u \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $s := uta = ub \in \mathfrak{p}^n$. Dann folgt $s \in A \setminus \mathfrak{p}$.

ii) Klar.

iii) Klar.

iv) Wir haben $\mathfrak{p}^{(n)} \cdot A_\mathfrak{p} = ((\mathfrak{p}^n \cdot A_\mathfrak{p}) \cap A) \cdot A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^n \cdot A_\mathfrak{p}$, da sogar allgemein $((I \cdot B) \cap A) \cdot B = I \cdot B$ gilt. Es bleibt also $\mathfrak{p}^n \cdot A_\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p})^n$ zu zeigen.

„$\subseteq$“: Sei $b \in \mathfrak{p}^n$. Dann existieren $b_{ij} \in \mathfrak{p}$ mit $b = \sum b_{i1} \dots b_{in}$. Für $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ folgt $\frac{b}{s} = \sum \frac{b_{i1}}{s} \cdot \frac{b_{i2}}{1} \dots \frac{b_{in}}{1} \in (\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p})^n$.

„$\supseteq$“: Sei $c \in (\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p})^n$. Dann existieren $b_{ij} \in \mathfrak{p}$ und $s_{ij} \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $c = \sum \frac{b_{i1}}{s_{i1}} \cdots \frac{b_{in}}{s_{in}}$. Definiere

$$s := \prod_{i,j} s_{ij} \quad \text{und} \quad b := \sum_i \left(\left(\prod_{\substack{j=1,\dots,n \\ j \neq i}} s_{ij} \right) \left(\prod_{j=1}^n b_{ij} \right) \right).$$

Dann gilt $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ und $b \in \mathfrak{p}^{(n)}$ und folglich liegt $c = \frac{b}{s} \in \mathfrak{p}^n \cdot A_\mathfrak{p}$. □

[28. Juni 2018]

[2. Juli 2018]

Satz 9.10 (Krulls Hauptidealsatz). *Sei A ein noetherscher Ring, $x \in A$ und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit $x \in \mathfrak{p}$ minimal (es existiert also kein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ mit $x \in \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$). Dann ist $\dim A_{\mathfrak{p}} \leq 1$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. Wir zeigen $\mathfrak{q} \in \operatorname{MinSpec} A$. Ohne Einschränkung sei ein A lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$ (gehe sonst zur Lokalisation $A_{\mathfrak{p}}$ über). Betrachte den Ring $A/(x)$. Es gilt $\operatorname{Spec} A/(x) = \{\mathfrak{p}\}$. Also ist $A/(x)$ ein noetherscher Ring, in dem jedes Primideal maximal ist. Nach Übungsblatt 8 wissen wir damit, dass $A/(x)$ artinsch ist.

Wir betrachten nun die Idealkette

$$(\mathfrak{q}^{(0)}+(x))/(x) \supseteq (\mathfrak{q}^{(1)}+(x))/(x) \supseteq \dots$$

in $A/(x)$. Da $A/(x)$ artinsch ist, gibt es ein $n \geq 0$ mit

$$(\mathfrak{q}^{(n)}+(x))/(x) = (\mathfrak{q}^{(n+1)}+(x))/(x) = \dots .$$

Insbesondere folgt $\mathfrak{q}^{(n)} + (x) = \mathfrak{q}^{(n+1)} + (x)$. Damit existiert für alle $f \in \mathfrak{q}^{(n)}$ Elemente $g \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$ und $a \in A$ mit $f = g + ax$, also $ax = f - g \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Nach Lemma 9.9 existiert nun ein $s \in A \setminus \mathfrak{q}$ mit $sax \in \mathfrak{q}^n$.

Wegen der Minimalität von $\mathfrak{p}$ folgt $x \notin \mathfrak{q}$, also $a \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Mit anderen Worten haben wir $\mathfrak{q}^{(n)} = (x)\mathfrak{q}^{(n)} + \mathfrak{q}^{(n+1)}$. Nach Korollar 2.19 mit $M = \mathfrak{q}^{(n)}$, $I = (x)$, $N' = \mathfrak{q}^{(n)}$ und $N = \mathfrak{q}^{(n+1)}$ erhalten wir $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$.

Wir gehen jetzt zur Lokalisation $A_{\mathfrak{q}}$ über:

$$(\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{q}})^n = \mathfrak{q}^{(n)} \cdot A_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}^{(n+1)} A_{\mathfrak{q}} = (\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{q}})^{n+1}$$

Wir wenden nun Lemma 2.18 auf $M = (\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{q}})^n$ und $I = \mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{q}} = \operatorname{Jac}(A_{\mathfrak{q}})$ an. Damit folgt $(\mathfrak{q} \cdot A\mathfrak{q})^n = 0$. Lemma 9.11 impliziert nun $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{q}} = \{\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{q}}\}$, also $\dim A_{\mathfrak{q}} = 0$. Das bedeutet aber $\mathfrak{q} \in \operatorname{MinSpec} A$. □

Lemma 9.11. *Sei $(B, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, für den ein $k \geq 0$ mit $\mathfrak{m}^k = 0$ existiert. Dann ist schon $\operatorname{Spec} B = \{\mathfrak{m}\}$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$. Zeige $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Die Inklusion $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ ist klar. Sei umgekehrt $b \in \mathfrak{m}$. Dann ist $b^k \in \mathfrak{m}^k = 0 \subseteq \mathfrak{p}$, also $b \in \mathfrak{p}$. □

9.2 Dimension von noetherschen lokalen Ringen

Definition 9.12. Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring sowie $I \subsetneq A$ ein Ideal. Dann sind äquivalent:

i) Es existiert ein $n \geq 0$ mit $\mathfrak{m}^n \subseteq I$.

ii) Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ folgt aus $I \subseteq \mathfrak{p}$ bereits $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$.

iii) $\dim A/I = 0$

iv) A/I ist artinsch.

Falls diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, heißt I *Definitionsideal* („ideal of definition").

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii): Da das maximale Ideal von A/I nilpotent ist, können wir Lemma 9.11 auf A/I anwenden.

ii) $\Rightarrow$ iii): Es gilt $\operatorname{Spec} A/I = \{\mathfrak{m}/I\}$, also folgt $\dim A/I = 0$.

iii) $\Rightarrow$ iv): A/I ist noethersch und es gilt $\operatorname{Spec} A/I = \operatorname{Max} A/I$. Nach Aufgabe 4 von Übungsblatt 8 ist A/I artinsch.

iv) $\Rightarrow$ i): Nach Aufgabe 3 von Übungsblatt 8 ist $\operatorname{Jac}(A/I)$ nilpotent, da A artinsch ist. Somit existiert ein $n \geq 0$ mit $(\mathfrak{m}/I)^n = 0$. Also gilt $\mathfrak{m}^n \subseteq I$. □

Satz 9.13. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring.*

i) *Falls $I = (a_1, \ldots, a_l)$ ein Definitionsideal ist, so gilt $\dim A \leq l$. Insbesondere folgt $\dim A < \infty$.*

ii) *Sei $\dim A = d$. Dann existiert ein Definitionsideal I von A, das von d Elementen erzeugt wird.*

Beweis. Wir führen in beiden Fällen einen Induktionsbeweis.

i) $l = 0$: Klar.

$l = 1$: Krulls Hauptidealsatz.

$l - 1 \to l$: Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$ und ohne dazwischenliegende Primideale. Dann ist $(a_1, \ldots, a_l) \nsubseteq \mathfrak{q}$. Ohne Einschränkung sei $a_1 \notin \mathfrak{q}$. Dann ist $(a_1) + \mathfrak{q}$ ein Definitionsideal, und somit existiert ein $n > 0$ mit $\mathfrak{m}^n \subseteq (a_1) + \mathfrak{q}$. Also gilt $a_i^n \in (a_1) + \mathfrak{q}$ für alle i. Demnach gibt es Elemnte $g_2, \ldots, g_l \in \mathfrak{q}$ und $c_2, \ldots, c_l \in A$ mit $a_i^n = c_i a_1 + g_i$.

Wir zeigen nun, dass $(a, g_2, \ldots, g_l)$ ein Definitionsideal ist. Es gilt mit $r := ln$ dann $I^r \subseteq (a_1, g_2, \ldots, g_l)$, da für $x \in I^r$ dann etwa $x = \sum_\nu c_\nu a_{i_1,\nu} \ldots a_{i_r,\nu}$ gilt und in diesem Ausdruck mindestens eines der a_i mit Potenz $\geq n$ vorkommen muss. Somit ist I aber ein Definitionsideal, und es existiert ein $s \geq 0$ mit $\mathfrak{m}^s \subseteq I$, also $\mathfrak{m}^r s \subseteq I^r \subseteq (a_1, g_2, \ldots, g_l)$.

Betrachte nun den Ring $A/(g_2,\ldots,g_l)$ sowie Primideale $\mathfrak{q}/(g_2,\ldots,g_l) \subsetneq \mathfrak{m}/(g_2,\ldots,g_l)$ und das Bild $\bar{a}_1$ von a_1 unter $A \to A/(g_2,\ldots,g_l)$. Da $\mathfrak{q}/(g_2,\ldots,g_l)$ kein Primoberideal von $\bar{a}_1$ ist (denn $(a_1, g_2, \ldots, g_l)$ ist ein Definitionsideal), können wir Krulls Hauptidealsatz anwenden. Demnach folgt $\dim A/(g_2,\ldots,g_l) \geq 1$, also $\dim A_\mathfrak{q}/(g_2,\ldots,g_l) = 0$. Also ist $(g_2, \ldots, g_l)$ ein Definitionsideal von $A_\mathfrak{q}$. Nach der Induktionsvoraussetzung folgt $\dim A_\mathfrak{q} \leq l - 1$. Sei nun

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{d-1} \subsetneq \mathfrak{p}_d$$

eine Primidealkette der Länge $d = \dim A$. Dann ist $\mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}_{d-1}$ ist ein $\mathfrak{q}$ wie oben. Schließlich folgt wegen $d - 1 \leq \dim A_{\mathfrak{p}_{d-1}} \leq l - 1$ dann $d \leq l$.

ii) $d = 0$: (0) ist offensichtlich ein Definitionsideal.

$d - 1 \to d$: Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$. Dann ist $\dim A_{\mathfrak{q}} = d - 1$. Hierzu wählen wir eine Primoberidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_{d-1} \subsetneq \mathfrak{p}_d$. Dann ist $\mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$ und $\dim A_{\mathfrak{p}_{d-1}} \leq d - 1$, da aus $\dim A_{\mathfrak{p}_{d-1}} \geq d$ dann $\dim A \geq d + 1$ folgen würde.

Nach der Induktionsvoraussetzung existieren Elemente $b_1, \ldots, b_{d-1} \in A_{\mathfrak{q}}$, sodass $(b_1, \ldots, b_{d-1})$ ein Definitionsideal von $A_{\mathfrak{q}}$ ist. Weiterhin existieren $u_i \in A, s_i \in A \setminus \mathfrak{q}$ mit $b_i = \frac{a_i}{s_i}$. Dann gilt

$$(b_1, \ldots, b_{d-1}) = \left(\frac{a_1}{1}, \ldots, \frac{a_{d-1}}{1}\right),$$

und $\mathfrak{q}$ ist somit in minimales Primideal von $(a_1, \ldots, a_{d-1})$.

Seien $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ die (wegen noethersch endlich vielen) Primoberideale von $(a_1, \ldots, a_{d-1})$. Wir zeigen nun $\mathfrak{m} \nsubseteq \mathfrak{q}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{q}_r$. Wir nehmen das Gegenteil an. Nach „prime avoidance“ existiert ein i mit $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{q}_i$, also sogar $\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_i$. Somit ist $\mathfrak{m}$ ein minimales Primideal über $(a_1, \ldots, a_{d-1})$, weshalb $(a_1, \ldots, a_{d-1})$ ein Definitionsideal von A ist und nach i) dann $\dim A \leq d - 1$ folgt, was ein Widerspruch ist.

Wir wählen nun ein $a_d \in \mathfrak{m} \setminus (q_1 \cup \ldots \cup q_r)$. Dann ist $(a_1, \ldots, a_{d-1}, a_d)$ ein Definitionsideal von A, da sonst ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ existieren würde. □

[2. Juli 2018]

[5. Juli 2018]

Korollar 9.14. *Sei A ein noetherscher Ring (nicht notwendigerweise lokal) sowie $a_1, \ldots, a_l \in A$ und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein minimales Primoberideal von $(a_1, \ldots, a_l)$. Dann folgt $\dim A_{\mathfrak{p}} \leq l$.*

9.3 Dimension von endlich erzeugten k-Algebren

Lemma 9.15. *Sei k ein Körper. Dann ist $\dim k[t_1, \ldots, t_n] = n$.*

Beweis. Nach den vorherigen Überlegungen ist $n \leq \dim A$ mit $A := k[t_1, \ldots, t_n]$ klar. Wir zeigen nun $\dim A \leq n$. Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l$ eine Primidealkette in A. Nach der Noether-Normalisierung existieren über k algebraisch unabhängige $a_1, \ldots, a_l \in A$ und $0 \leq h_0 \leq \cdots \leq h_l \leq n$ mit

- $C := k[a_1, \ldots, a_l] \subseteq A$ ganz und
- $\mathfrak{p}_i \cap C = (a_1, \ldots, a_{h_i})$ für $i = 0, \ldots, l$.

Da $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$ und $A \subseteq C$ ganz, folgt mit Proposition 6.8 iii) schon $\mathfrak{p}_i \cap C \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1} \cap C$, also $h_i < h_{i+1}$ und damit $l \leq n$. $\square$

Satz 9.16. *Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra und ein Integritätsbereich. Dann gilt:*

i) $\dim A = \operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(A)/k)$

ii) *Für eine maximale (also nicht verlängerbare) Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l$ gilt $l = \dim A$.*

Beweis.

i) Nach der NOETHER-NORMALISIERUNG existieren über k algebraisch unabhängige Elemente $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $k[a_1, \ldots, a_n] \subseteq A$ ganz. Dann folgt mit $n := \operatorname{trdeg}(\operatorname{Quot}(A)/k)$ nach Proposition 9.7 $\dim A = \dim k[a_1, \ldots, a_n] = n$ (vergleiche Lemma 9.15).

ii) Sei eine maximale Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_l$ gegeben. Wieder nach der NOETHER-NORMALISIERUNG gibt es über k algebraisch unabhängige $a_1, \ldots, a_n \in A$ und $0 \leq h_0 \leq \cdots \leq h_l \leq n$ mit

- $C = k[a_1, \ldots, a_n] \subseteq A$ ganz und
- $\mathfrak{p}_i \cap C = (a_1, \ldots, a_{h_i})$ für $i = 0, \ldots, l$.

Wegen i) muss $\dim A = n$ sein, also $l \leq n$.

Wir zeigen nun $h_i = i$ für alle $i = 0, \ldots, l$.

Beweis. Wegen der Ganzheit von $C \subseteq A$ und $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$ gilt bereits $h_i < h_{i+1}$. Wir führen nun eine Induktion nach i.

$i = 0$: Angenommen, $h_0 \neq 0$. Dann ist $(a_1, \ldots, a_{h_0}) \neq (0)$. Da die Erweiterung ganz ist, folgt $\mathfrak{p}_0 \neq (0)$ Also ist $\mathfrak{p}_0 \notin \operatorname{MinSpec}(A)$ im Widerspruch zur Maximalität der Kette.

Man vergleiche hierzu auch das folgende Bild, wobei A ein Integritätsbereich und $k[a_1, \ldots, a_n]$ normal ist.

$$\begin{tikzcd}
A & (0) \arrow[d, mapsto] & \subseteq & \mathfrak{p}_0 \arrow[d, mapsto] \\
C \arrow[u, phantom, "\text{ganz}\ \bigcup\!|"] & (0) & \subseteq & (a_1, \ldots, a_{h_0}) \\
k[a_1, \ldots, a_n] \arrow[u, phantom, "||"] & & &
\end{tikzcd}$$

$i \to i+1$: Angenommen, $h_i + 1 < h_{i+1}$. Definiere $r := h_i$ und $s := h_{i+1}$. GOING DOWN impliziert nun, dass es ein $\overline{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec} A/\mathfrak{p}_i$ mit $(0) \subsetneq \overline{\mathfrak{p}} \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i$ gibt. Betrachte das Urbild $\mathfrak{p}$ von $\overline{\mathfrak{p}}$ unter $A \to A/\mathfrak{p}_i$. Dann ist $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$, was aber ein Widerspruch zur Maximalität ist.

Man vergleiche hierzu wieder auch das folgende Bild, wobei A ein Integritätsbereich und $k[a_1, \ldots, a_n]$ normal ist.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & A/\mathfrak{p}_i & & \exists\, \overline{\mathfrak{p}} \arrow[dd, mapsto] & \subsetneq & \mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i \\
C \arrow[u, phantom, "\text{ganz } \bigcup\mid"] \arrow[r] & C/\mathfrak{p}_i\cap C \arrow[u, phantom, "\text{ganz } \bigcup\mid"] & & & & \\
k[a_1, \ldots, a_n] \arrow[u, phantom, "\parallel"] & k[a_{r+1}, \ldots, a_n] \arrow[u, phantom, "\parallel"] & (0) \subsetneq & (a_r + 1) & \subsetneq & (a_{r+1}, \ldots, a_s)
\end{tikzcd}$$

∎

Zeige nun noch $h_l = n$. Angenommen $h_l < n$. Dann existiert nach Going up ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p}_l \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \cap C = (a_1, \ldots, a_n)$, also aufgrund der Ganzheit $\mathfrak{p}_l \subsetneq \mathfrak{p}$. Das ist wieder ein Widerspruch.

Man vergleiche auch hierzu wieder auch das folgende Bild, wobei A ein Integritätsbereich und $k[a_1, \ldots, a_n]$ normal ist.

$$\begin{tikzcd}
A & \mathfrak{p}_l \arrow[d, mapsto] & \subsetneq & \exists\, \mathfrak{p} \\
C \arrow[u, phantom, "\text{ganz } \bigcup\mid"] & (a_1, \ldots, a_{h_l}) & \subsetneq & (a_1, \ldots, a_n) \\
k[a_1, \ldots, a_n] \arrow[u, phantom, "\parallel"] & & &
\end{tikzcd}$$

∎

Korollar 9.17. *Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra und ein Integritätsbereich. Für $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ folgt dann $\dim A_{\mathfrak{m}} = \dim A$.*

Beweis. Die Ungleichung „$\leq$“ ist klar. Für „$\geq$“ wählen wir eine Primidealkette $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_d$ in $A_{\mathfrak{m}}$, wobei $d := \dim A_m$. Dann ist $\mathfrak{q}_0 \cap A \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_d \cap A$ eine Primidelakette. Diese ist maximal wegen der Maximalität von $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_d$. Nach Satz 9.16 folgt dann $d = \dim A$. ∎

Korollar 9.18. *Sei A eine endlich erzeugte k-Algebra und ein Integritätsbereich. Sei $x \in A \setminus \{0\}$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit $x \in \mathfrak{p}$ minimal. Dann ist $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A - 1$.*

Beweis. Nach Krulls Hauptidealsatz wissen wir, dass $\dim A_{\mathfrak{p}} \leq 1$ sein muss. Da A ein Integritätsbereich ist, gilt sogar $\dim A_{\mathfrak{p}} = 1$ (denn wäre $\dim A_{\mathfrak{p}} = 0$, so wäre $\mathfrak{p} \in \operatorname{MinSpec} A = \{(0)\}$ und damit $x = 0$).

Betrachte $A/\mathfrak{p}$ und definiere $d := \dim A/\mathfrak{p}$. Wir betrachten nun die durch das folgende Diagramm definierte Primidealkette in $A/\mathfrak{p}$.

$$\begin{tikzcd}
A/\mathfrak{p} & & & (0) \arrow[d, mapsto] & \subsetneq & \overline{\mathfrak{p}_1} \arrow[d, mapsto] & \subsetneq & \cdots & \subsetneq & \overline{\mathfrak{p}_d} \arrow[d, mapsto] \\
A \arrow[u] & (0) & \subsetneq & \mathfrak{p} & \subsetneq & \mathfrak{p}_1 & \subsetneq & \cdots & \subsetneq & \mathfrak{p}_d
\end{tikzcd}$$

Somit folgt $\dim A \geq \dim {}^{A}/_{\mathfrak{p}} + 1$. Aber es gilt auch schon Gleichheit, da $\dim A_{\mathfrak{p}} = 1$. $\square$

Bemerkung 9.19. Anwendung von Korollar 9.18 auf Geometrie: Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und $f \in \mathrm{A}(X) \setminus \{0\}$. Betrachte $\mathrm{Z}(f) \subseteq X$. Es gilt

$$\{\text{Irreduzible Komponenten von } \mathrm{Z}(f)\} \xleftrightarrow{1:1} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A(X) \mid f \in \mathfrak{p} \text{ minimal}\}.$$

Nach Korollar 9.18 folgt für alle irreduziblen Komponenten $C \subseteq \mathrm{Z}(f)$ dann $\dim C = \dim X - 1$. Insbesondere gilt $\dim \mathrm{Z}(f) = \dim X - 1$.

10 Varietäten

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

10.1 Räume mit k-Funktionengarben

Definition 10.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine *Garbe* von k-Funktionen $\mathcal{O}$ ist Tupel $(\mathcal{O}(U))_{U \subseteq X \text{ offen}}$ von Unteralgebren

$$\mathcal{O}(U) \subseteq \mathrm{Abb}(U, k)$$

sodass gilt:

i) (Unter-Prägarbe): Seien $V \subseteq U \subseteq X$ beide offen. Für $f \in \mathcal{O}(U)$ gilt $f|_V \in \mathcal{O}(V)$.

ii) (Verklebung, „gluing“): Sei $U \subseteq X$ offen und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U (das heißt $U_i \subseteq U$ offen und $\bigcup_{i \in I} U_i = U$). Falls $f \in \mathrm{Abb}(U, k)$ mit $f|_{U_i} \in \mathcal{O}(U_i)$, so gilt $f \in \mathcal{O}(U)$.

Bemerkung 10.2. Sei $\mathcal{O}$ eine Garbe von k-Funktionen auf X.

i) Seien $V \subseteq U \subseteq X$ offen. Dann ist $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V), f \mapsto f|_V$ ein Homomorphismus von k-Algebren, da $\mathrm{Abb}(U, k) \to \mathrm{Abb}(V, k), f \mapsto f|_V$ ein solcher ist.

ii) Sei $U \subseteq X$ offen sowie $U = \bigcup U_i$ offene Überdeckung. Dann gilt:

   a) Für $f, g \in \mathcal{O}(U)$ mit $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ folgt $f = g$.

   b) Seien $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, sodass $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle i, j. Dann existiert genau ein $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f|_{U_i} = f$.

Definition 10.3. Ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus einem topolgischen Raum X und Garbe $\mathcal{O}_X$ von k-Funktionen heißt *Raum mit k-Funktionengarbe.*

Beispiel 10.4. Sei X ein topologischer Raum. Bespiele für k-Funktionengarben auf X:

i) $\mathcal{O}(U) = \mathrm{Abb}(U, k)$ liefert Garbe von k-Funktionen.

ii) Falls $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$: $\mathcal{O}(U) = \{\text{stetige Abbildungen } U \to k\}$

iii) Falls $k = \mathbb{C}$, X komplexe Mannigfaltigkeit: $\mathcal{O}(U) = \{\text{holomorphe Funktionen } U \to \mathbb{C}\}$

Bemerkung 10.5. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät. Sei $h \in \mathrm{A}(X)$. Betrachte den Isomorphismus β von k-Algebren:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{A}(X) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1) & \subseteq & \mathrm{Abb}(X, k) & & f \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{A}(X)[h^{-1}] & & & & \mathrm{Abb}(\mathrm{D}(h), k) & & f|_{\mathrm{D}(h)}
\end{array}$$

Es gilt $h(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathrm{D}(h)$, also $h|_{\mathrm{D}(h)} \in \mathrm{Abb}(\mathrm{D}(h), k)^\times$. Die Komposition $\mathrm{A}(X) \to \mathrm{Abb}(\mathrm{D}(h), k)$ faktorisiert folglich über $\mathrm{A}(X)[h^{-1}]$ zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(X)[h^{-1}] &\longrightarrow \mathrm{Abb}(\mathrm{D}(h), k), \\
\frac{f}{h^n} &\longmapsto \left[x \mapsto \frac{f(x)}{h(x)^n}\right].
\end{aligned}$$

Letztere Abbildung ist dabei injektiv. Falls $\frac{f(x)}{h(x)^n} = 0$ (für alle $x \in \mathrm{D}(h)$), dann bedeutet das, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathrm{D}(h)$, also $f(x)h(x) = 0$ für alle $x \in X$. Daraus folgt $fh = 0$, da $|k| = \infty$. Also gilt $\frac{f}{h^n} = 0$ in $\mathrm{A}(X)$.

Lemma 10.6. *Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät. Dann gibt es genau eine Garbe von k-Funktionen $\mathcal{O}_X$ auf X, sodass für alle $h \in \mathrm{A}(X)$*

$$\mathcal{O}_X(\mathrm{D}(h)) = \mathrm{A}(X)[h^{-1}]$$

gilt, wobei wir $\mathrm{A}(X)[h^{-1}]$ mit seinem Bild unter $\mathrm{A}(X)[h^{-1}] \hookrightarrow \mathrm{Abb}(\mathrm{D}(h), k)$ identifizieren.

[5. Juli 2018]

[9. Juli 2018]

Beweis. Zunächst zur Eindeutigkeit. Seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ Garben von k-Funktionen mit $\mathcal{O}(\mathrm{D}(h)) = \mathcal{O}'(\mathrm{D}(h))$ (alle $h \in A(X)$). Sei $U \subseteq X$ offen. Dann existieren $h_i \in \mathrm{A}(X)$ mit $U = \mathrm{D}(h_1) \cup \cdots \cup \mathrm{D}(h_N)$. Sei $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann gilt $f|_{\mathrm{D}(h_i)} \in \mathcal{O}(\mathrm{D}(h_i)) = \mathcal{O}'(\mathrm{D}(h_i))$. Per Verklebung folgt $f \in \mathcal{O}'(U)$.

Nun zur Existenz. Sei hierzu $U \subseteq X$ offen. Definiere

$$\mathcal{O}_X(U) := \left\{ f\colon U \to k \;\middle|\; \substack{\forall x \in U \colon \exists V \subseteq U \text{ offen}, x \in V\colon \\ \exists g, s \in \mathrm{A}(X)\colon \forall y \in V\colon s(y) \neq 0 \text{ und } f(y) = \frac{g(y)}{s(y)}} \right\}.$$

$\mathcal{O}_X$ ist eine Garbe von k-Funktionen:

- $\mathcal{O}_X(U) \subseteq \operatorname{Abb}(U,k)$ ist eine Unteralgebra.
- Unter-Prägarbe: gilt, da definierende Eigenschaft an f lokal ist
- Verklebung: gilt ebenfalls wegen Lokalität

Es verbleibt, $\mathcal{O}_X(\mathrm{D}(h)) = \mathrm{A}(X)[h^{-1}]$ zu zeigen.

„$\supseteq$“: Da $\mathrm{A}(X)[h^{-1}] = \left\{f\colon \mathrm{D}(h) \to k \;\middle|\; \exists g \in A(X), n \geq 0 : \forall x \in \mathrm{D}(h) : f(x) = \frac{g(x)}{h(x)^n}\right\}$, folgt $A(X)[h^{-1}] \subseteq \mathcal{O}_X(\mathrm{D}(h))$.

„$\subseteq$“: Sei $f \in \mathcal{O}_X(\mathrm{D}(h))$. Betrachte $I := \{a \in A(X) \mid \exists g \in A(X) : \forall x \in \mathrm{D}(h) : g(x) = (af)(x)\}$. I ist ein Ideal in $\mathrm{A}(X)$.

Wir zeigen nun $h \in \sqrt{I}$.

Beweis. Nach Hilberts Nullstellensatz folgt $\sqrt{I} = \mathrm{I}(\mathrm{Z}(I))$. Angenommen, $h \notin \mathrm{I}(\mathrm{Z}(I))$. Dann existiert ein $x \in \mathrm{Z}(I)$ mit $h(x) \neq 0$, also $x \in \mathrm{D}(h)$. Folglich existiert eine offene Umgebung $x \in V \subseteq \mathrm{D}(h)$ sowie $g, s \in \mathrm{A}(X)$, sodass $s(y) \neq 0$ und $f(y) = \frac{g(y)}{s(y)}$ für alle $y \in V$ gilt, was äquivalent ist zu

$$\forall y \in V: \; s(y)f(y) = g(y)$$

ist. Ohne Einschränkung ist $V = \mathrm{D}(u)$ für ein $u \in A(X)$. Insbesondere gilt für alle $y \in \mathrm{D}(u)$ dann $(usf)(y) = (ug)(y)$. Daraus folgt nun, dass $(usf)(y) = (ug)(y)$ auch für alle $y \in D(h)$ gilt, da $u(y) = 0$ für alle $y \in \mathrm{D}(h) \setminus \mathrm{D}(u)$ gilt.

Damit ist nun $us \in I$, aber $us(x) \neq 0$, also $x \notin \mathrm{Z}(I)$. Das ist ein Widerspruch zu unser Konstruktion. □

Also gibt es $n \geq 0$ mit $h^n \in I$. Dann existiert ein $g \in \mathrm{A}(X)$ mit

$$g|_{\mathrm{D}(h)} = (fh^n)|_{\mathrm{D}(h)}.$$

Das bedeutet aber $f = \frac{g}{h^n} \in A(X)[h^{-1}]$. □

Definition 10.7. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät. Die Garbe $\mathcal{O}_X$ von k-Funktionen heißt *Strukturgarbe* oder *Garbe von regulären Funktionen* auf X.

10.2 Morphismen

Definition 10.8. Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ Räume mit k-Funktionengarben. Ein Morphismus $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$, sodass

$$g \circ f|_{f^{-1}(u)} \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(u))$$

für alle offenen $U \subseteq Y$ und $g \in \mathcal{O}_Y(U)$ gilt.

Bemerkung. Die Abbildung $\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)), g \mapsto g \circ f|_{f^{-1}(U)}$ ist ein Homomorphismus von k-Algebren.

Bemerkung 10.9. Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Sei $f^*\colon \mathrm{A}(Y) \to \mathrm{A}(X)$. Frage: Ist f ein Morphismus von Räumen mit k-Funktionengarben?

i) Sei $k \in \mathrm{A}(Y)$. Betrachte $\mathrm{D}_Y(h)$ (die offene Hauptmenge von h in Y). Wir erhalten das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A}(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & \mathrm{A}(X) \arrow[d] \\ \mathrm{A}(Y)[h^{-1}] \arrow[r, dashed, "\exists! f^*"] & \mathrm{A}(X)[(f^*h)^{-1}] \end{tikzcd}$$

Sei $g \in \mathcal{O}_Y(\mathrm{D}_Y(h)) = \mathrm{A}(X)[h^{-1}]$. Dann gilt

$$f^*g \in A(X)[(f^*h)^{-1}] = \mathcal{O}_X(\mathrm{D}_X(f^*h)) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(\mathrm{D}_Y(h))).$$

Gleichzeitig gilt $f^*g = g \circ f|_{f^{-1}(\mathrm{D}(h))}$

ii) Sei $U \subseteq Y$ offen, sei $g \in \mathcal{O}_Y(U)$. Also gibt es elemente $h_i \in \mathrm{A}(Y)$ mit $U = \mathrm{D}(h_1) \cup \cdots \cup \mathrm{D}(h_N)$. Setze $U_i := \mathrm{D}(h_i)$. Betrachte $g|_{U_i} \in \mathcal{O}_Y(U_i)$. Nach i) gilt $g|_{U_i} \circ f|_{f^{-1}(U_i)} \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U_i))$.

Aber es gilt $(g \circ f|_{f^{-1}(U)})|_{f^{-1}(U_i)} = g|_{U_i} \circ f|_{f^{-1}(U_i)}$. Da $f^{-1}(U) = \bigcup f^{-1}(U_i)$ folgt mit Verklebung $g \circ f|_{f^{-1}(U)} \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$.

Also: Ja, f ist ein Morphismus von Räumen mit k-Funktionengarben.

Proposition 10.10. *Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Dann ist die Zuordnung*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}((X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)), \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

aus Bemerkung 10.9 eine Bijektion.

Beweis. Die Injektivität ist klar. Für die Surjektivität sei $f\colon (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von Räumen mit k-Funktionengarben. Definiere $\varphi\colon \mathrm{A}(Y) \to \mathrm{A}(X)$ durch

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A}(Y) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & \mathrm{A}(X) \arrow[d, equal] \\ \mathcal{O}_Y(Y) \arrow[r, "g \mapsto g\circ f"] & \mathcal{O}_X(X). \end{tikzcd}$$

Nach der Definition von Morphismen von Räumen mit k-Funktionengarben ist φ wohldefiniert und ein k-Algebrenhomomorphismus.

Betrachte $\varphi^\# \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Zeige $f = \varphi^\#$. Zur Erinnerung: $\varphi^\#$ entsteht durch einen Lift Φ im folgenden Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathbb{A}^m}(\mathbb{A}^m) \arrow[rrr, "g\mapsto g\circ F"] \arrow[ddd, "g\mapsto g|_Y"'] \arrow[dr, equal] & & & \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n) \arrow[ddd, "h\mapsto h|_X"] \arrow[dl, equal] \\
& k[s_1, \dots, s_m] \arrow[r, dashed, "\exists\Phi"] \arrow[d] & k[t_1, \dots, t_n] \arrow[d] & \\
& \mathrm{A}(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dl, equal] & \mathrm{A}(X) \arrow[dr, equal] & \\
\mathcal{O}_Y(Y) \arrow[rrr, "h\mapsto h\circ f"] & & & \mathcal{O}_X(X)
\end{tikzcd}$$

Betrachte $F\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$. Es gilt $\varphi^\#(x) = F(x)$ für alle $x \in X$. Für alle $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^m}(\mathbb{A}^m)$ und $x \in X$ gilt $g(F(x)) = g(f(x))$, wie durch Verfolgen des äußeren Weges im vorherigen Diagramm klar ist.

Daraus folgt nun $F(x) = f(x)$ für alle $x \in X$. Damit folgt die Behauptung, da $\varphi^\#(x) = F(x)$. $\square$

Das rechtfertigt nun die folgende

Re-Definition. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit k-Funktionengarbe. $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *affine Varietät*, falls eine irreduzible algebraische Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ existiert, sodass $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y)$ (als Räume mit k-Funktionengarben) gilt.

10.3 Teilräume

Lemma 10.11. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit k-Funktionengarbe sowie $Y \subseteq X$ Teilmenge. Versehe Y mit Relativtopologie von X. Betrachte die Teilmengeninklusion $i\colon Y \to X$ (stetig). Dann existiert genau eine k-Funktionengarbe $\mathcal{O}_X|_Y$ auf Y, sodass*

i) $i\colon (Y, \mathcal{O}_X|_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ *ein Morphismus ist und*

ii) *für alle Morphismen von Räumen mit k-Funktionengarben $f\colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ mit $f(Z) \subseteq Y$ das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
(Z, \mathcal{O}_Z) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\tilde{f}"'] & (X, \mathcal{O}_X) \\
& (Y, \mathcal{O}_X|_Y) \arrow[u, "i"]
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis.

Eindeutigkeit: Seien $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$, sodass i) und ii) gelten.

$$\begin{tikzcd}
(Y, \mathcal{O}) \arrow[r, dashed, shift left, "\exists! i_1"] \arrow[dr, "i"'] & (Y, \mathcal{O}') \arrow[l, dashed, shift left, "\exists! i_2"] \arrow[d, "i"] \\
& (X, \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

Dann ist $i_1 = i_2 = \mathrm{id}_Y$ (als Abbildungen), also $\mathcal{O}(U) \subseteq \mathcal{O}'(U)$ und $\mathcal{O}'(U) \subseteq \mathcal{O}(U)$, da i_1 und i_2 Morphismen sind.

[9. Juli 2018]

[12. Juli 2018]

Existenz: Sei $U \subseteq Y$ offen. Dann existiert ein offenes $V \subseteq X$ mit $Y \cap V = U$. Wir beobachten, dass $g \in \mathcal{O}_X(V)$. Dann ist $g|_{V \cap Y = U} \in \mathcal{O}_Y(U)$. Problem ist die Verklebung, weshalb wir lokal vorgehen. Definiere

$$(\mathcal{O}_X|_Y)(U) := \left\{ g\colon U \to k \;\middle|\; {\scriptstyle \forall y \in U\colon \exists V' \subseteq X \text{ offen}, g \in V', \atop \exists g' \in \mathcal{O}_X(V')\colon g'|_{U \cap V'} = g|_{K \cap V'}} \right\}.$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{O}_X|_Y$ eine Garbe von k-Funktionen ist.

- $(\mathcal{O}_X|_Y)(U) \subseteq \mathrm{Abb}(U, k)$ Unteralgebra: Klar.
- Unter-Prägarbe: Klar.
- Verklebung: Sei $U = \bigcup U_i$ eine offene Überdeckung und $g \in \mathrm{Abb}(U, k)$ mit $g|_{U_i} \in (\mathcal{O}_X|_Y)(U_i)$. Wir behaupten $g \in (\mathcal{O}_X|_Y)(U)$. Sei hierzu $y \in U$. Dann existiert ein i mit $y \in U_i$. Nach Definition existiert ein offenes $V_i' \subseteq X$, $y \in V_i'$ und es existiert ein $g_i' \in \mathcal{O}_X(V_i')$ mit $g_i'|_{U_i \cap V_i'} = g|_{U_i \cap V_i'}$. Definiere nun $V' := V_i' \cap V \cap V_i$ (wobei $V \subseteq X$ offen, sodass $Y \cap V = U$ und $V_i \subseteq X$ offen, sodass $Y \cap V_i = U_i$).

  Dann folgt $g|_{V' \cap U} = g_i'|_{V' \cap U}$ (da $V' \cap U \subseteq V_i' \cap U_i$).

Damit ist die Existenz gezeigt.

Tatsächlich gilt auch i) nach Konstruktion.

Zu ii): Sei $f\colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus mit $f(Z) \subseteq Y$. Definiere $\tilde{f}\colon Z \to Y, z \mapsto f(z)$. Wir zeigen, dass $\tilde{f}$ ein Morphismus ist. Sei $U \subseteq Y$ offen sowie $g \in (\mathcal{O}_X|_Y)(U)$.

Wir zeigen nun $g \circ \tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(U)} \in \mathcal{O}_Z(\tilde{f}^{-1}(U))$.

Beweis. Da $g \in (\mathcal{O}_X|_Y)(U)$ ist, existiert für alle $y \in U$ ein offenes $V_y \subseteq X$ mit $y \in V_y$ und ein $g_y \in \mathcal{O}_X(V_y)$ mit $g_y|_{V_y \cap U} = g|_{V_y \cap U}$. Wie vorher sei $V \subseteq X$ offen mit $V \cap Y = U$. Ohne Einschränkung sei $V_y \subseteq V$. Dann gilt $U \cap V_y = Y \cap V_y$. Da $f\colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus ist, gilt $g_y \circ f|_{f^{-1}(V_y)} \in \mathcal{O}_Z(f^{-1}(V_y))$. Wegen $f(Z) \subseteq Y$ folgt nun $f^{-1}(V_y) = f^{-1}(V_y \cap Y) = \tilde{f}^{-1}(V_y \cap Y)$.

Also gilt $(g \circ \tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(U)})|_{\tilde{f}^{-1}(V_y \cap Y)} = g|_{V_y \circ Y} \circ f|_{f^{-1}(V_y)} = g_y \circ f|_f^{-1}(V_y) \in \mathcal{O}_Z(f^{-1}(V_y)) = \mathcal{O}_Z(\tilde{f}^{-1}(V_y \cap Y))$. □

Da $\tilde{f}^{-1}(U) = \bigcup_{y \in U} \tilde{f}^{-1}(V_y \cap Y)$ folgt mit der Verklebung schließlich

$$g \circ \tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(U)} \in \mathcal{O}_Z(\tilde{f}^{-1}(U)).$$ □

Bemerkung 10.12. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ Raum mit k-Funktionengarbe sowie $Y \subseteq X$.

i) Falls $Y \subseteq X$ offen ist, so folgt $(\mathcal{O}_X|_Y)(U) = \mathcal{O}_X(U)$.

Dies gilt, da für offene $U \subseteq Y$ dann $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$ eine Garbe von k-Funktionen auf Y definiert, welche die universelle Eigenschaft aus Lemma 10.11 erfüllt.

ii) Ist $Z \subseteq Y$, so gilt $(\mathcal{O}_X|_Y)|_Z = \mathcal{O}_X|_Z$.

Lemma 10.13. *Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n$ eine irreduzible algebraisch Teilmenge.*

i) *Sei $Y \subseteq X$ abgeschlossen und irreduzibel. Dann ist $\mathcal{O}_X|_Y = \mathcal{O}_Y$.*

ii) *Sei $h \in \mathrm{A}(X)$. Sei $Y = \{(x,z) \in X \times \mathbb{A}^1 \mid h(x) \cdot z = 1\} \subseteq X \times \mathbb{A}^1$ (abgeschlossen und irreduzibel). Dann ist $Y \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ eine irreduzible algebraische Teilmenge. Es gilt $\mathrm{A}(Y) \cong \mathrm{A}(X)[h^{-1}]$. Die Abbildung $f\colon Y \to D(h), (x,z) \mapsto x$ ist ein Homöomorphismus und ein Isomorphismus*

$$f\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (D(h), \mathcal{O}_X|_{D(h)}).$$

Beweis.

i) Sei $h \subseteq X$. Zeige $(\mathcal{O}_X|_Y)(U) = \mathcal{O}_Y(U)$.

„$\subseteq$“: Sei $i\colon Y \to X$ die Inklusionsabbildung. Da i ein Morphismus von algebraischen Teilmengen ist, ist nach Proposition 10.10 auch $i\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus von Räumen mit k-Funktionengarben. Andererseits ist $i\colon (Y, \mathcal{O}_X|_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ auch ein Morphismus. Nach der universellen Eigenschaft (Lemma 10.11 ii)) erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
(Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, dashed, "\exists! \tilde{i}"'] & (X, \mathcal{O}_X) \\
& (Y, \mathcal{O}_Y|_Y). \arrow[u, "i"]
\end{tikzcd}$$

Es folgt $\tilde{i} = \mathrm{id}_Y$ (als Abbildung von Mengen). Sei also $U \subseteq Y$ offen und $g \in (\mathcal{O}_X|_Y)(U)$. Dann gilt $g = g \circ \tilde{i}|_U \in \mathcal{O}_Y(U)$.

„$\supseteq$“: Sei $g \in \mathcal{O}_Y(U)$. Sei $y \in U$. Dann existiert ein $\overline{h} \in \mathrm{A}(Y) = {}^{\mathrm{A}(X)}/_{\mathrm{I}(Y)}$ mit $y \in \mathrm{D}_Y(\overline{h}) \subseteq U$. Da $g|_{\mathrm{D}_y(\overline{h})} \in \mathcal{O}_Y(\mathrm{D}(\overline{h})) = \mathrm{A}(Y)[h^{-1}]$, existieren $\overline{f} \in \mathrm{A}(Y)$ und $r \geq 0$ mit $\overline{g} = \frac{\overline{f}}{\overline{h}^r}$.

Wir wählen nun Urbilder f, h von $\overline{f}, \overline{h}$ unter $\mathrm{A}(X) \to \mathrm{A}(Y)$ (also $\overline{f} = f|_Y$ usw.). Betrachte $g' := \frac{f}{h^r} \in \mathrm{A}(X)[h^{-1}] = \mathcal{O}_X(\mathrm{D}_X(h))$. Definiere $V' := \mathrm{D}_X(h)$. Dann ist $V' \cap Y = D_Y(\overline{h})$ und $g'|_{V' \cap Y} = g|_{V' \cap Y}$. Also gilt $g \in (\mathcal{O}_X|_Y)(U)$.

ii) In Aufgabe 3 (i) auf Übungsblatt 10 wurde bereits bewiesen, dass

- Y irreduzibel und abgeschlossen in $\mathbb{A}^{n+1}$,
- $\mathrm{A}(Y) \cong \mathrm{A}(X)[h^{-1}]$ und

- f ein Homöomorphismus ist.

Es verbleibt zu zeigen, dass

a) f ein Morphismus von Räumen mit k-Funktionengarben und

b) f^{-1} ein Morphismus von Räumen mit k-Funktionengarben ist.

Beweis:

a) Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbb{A}^1 \arrow[r, "\mathrm{pr}_X"] & X \\ Y \arrow[u, phantom, "\text{abgeschlossen } \bigcup\mid i"] \arrow[r, "f"] & \mathrm{D}(h). \arrow[u, phantom, "\bigcup\mid \text{offen}"] \end{tikzcd}$$

Betrachte die Komposition $\overline{f}\colon Y \to X, \overline{f} = \mathrm{pr}_X \circ i$. Also ist $\overline{f}$ ein Morphismus von algebraischen Teilmengen. Nach Proposition 10.10 ist $\overline{f}\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus. Es gilt $\overline{f}(Y) = \mathrm{D}(h)$ und mit Lemma 10.11 kommutiert das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[dr, dashed, "\exists ! \tilde{f}"'] & (X, \mathcal{O}_X) \\ & (\mathrm{D}(h), \mathcal{O}_X|_{\mathrm{D}(h)}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Als Abbildung gilt nun $\tilde{f} = f$.

b) Es gilt $f^{-1}\colon \mathrm{D}(h) \to Y, x \mapsto \left(x, \frac{1}{h(x)}\right)$. Es ist zu zeigen, dass f^{-1} ein Morphismus von Räumen mit k-Funktionengarben ist. Sei $U \subseteq Y$ offen sowie $g \in \mathcal{O}_Y(U)$.

Ohne Einschränkung gilt $U = \mathrm{D}_Y(u)$ für ein $u \in \mathrm{A}(Y) \cong \mathrm{A}(X)[h^{-1}]$, was bedeutet, dass es $a \in \mathrm{A}(X)$ und $r \geq 0$ gibt, sodass $u \mapsto \frac{a}{h^r}$ unter obigem Isomorphismus.

Sei also $u\colon Y \to k, (x, z) \mapsto \frac{a(x)}{h(x)^r} = a(x)z^r$. Damit gilt nun $\mathrm{D}_Y(u) = \{(x, z) \in Y \mid a(x) \neq 0\}$ und $(f^{-1})^{-1}(\mathrm{D}_Y(u)) = f(\mathrm{D}_Y(u)) = \{x \in \mathrm{D}_X(h) \mid a(x) \neq 0\} = \mathrm{D}_X(ah)$.

Es gilt $g \in \mathcal{O}_Y(\mathrm{D}_Y(a)) \cong A(X)[h^{-1}]$. Also existieren $g' \in \mathrm{A}(X)$ und $n \geq 0$ mit $g \mapsto \frac{g'}{(ah)^n}$. Das heißt $g\colon \mathrm{D}_Y(h) \to k, (x, z) \mapsto \frac{g'(x)}{(a(x)h(x))^n} = \frac{g'(x)z^n}{a(x)^n}$.

Wir erhalten also für $g \circ f^{-1}|_{(f^{-1})^{-1}(\mathrm{D}_Y(a))}\colon \mathrm{D}_X(ah) \to k, x \mapsto \frac{g'(x)}{a(x)^n h(x)^n}$ (wobei $(f^{-1})^{-1}(\mathrm{D}_Y(a)) = \mathrm{D}_X(ah)$ gilt) dann $g \circ f^{-1}|_{(f^{-1})^{-1}(\mathrm{D}_Y(a))} \in \mathcal{O}_X(\mathrm{D}_X(ah)) = \mathcal{O}_X((f^{-1})^{-1}(\mathrm{D}_Y(u)))$ folgt, also $f^{-1}\colon (\mathrm{D}(h), \mathcal{O}_X|_{\mathrm{D}(h)}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus ist. □

10.4 Prävarietäten

Definition 10.14.

i) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit k-Funktionengarbe. $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *Prävarietät* („prevariety"), wenn es eine endliche offene Überdeckung $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ gibt, sodass $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ für jedes $1 \leq i \leq n$ eine affine Varietät ist.

ii) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ Prävarietäten. Ein Morphismus $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein Morphismus von Räumen mit k-Funktionengarben.